Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2020-21
1. Gravitáció, égi mechanika
Megoldások

Dálya Gergely, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

2020. szeptember 19.

1. Bemelegítő feladatok

B.1. feladat

A gravitációs gyorsulás értékét legegyszerűbben Newton II. törvényének felírásával kaphatjuk meg:

$$F = ma = mg = G\frac{mM}{r^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}. \tag{1}$$

Behelyettesítve az egyes égitestek tömegeit és sugarait:

- $\boldsymbol{g_{\mathrm{H}} = 1{,}62\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\mathrm{V}} = 8{,}87\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\mathrm{J}} = 25{,}93\mathrm{m/s^2}}$
- $\boldsymbol{g_{\odot} = 273{,}77\mathrm{m/s^2}}$.

B.2. feladat

A geostacionárius műholdak stabil körpályán keringenek a Föld körül, így a rájuk ható erő, vagyis a Föld gravitációs ereje adja a centripetális erőt:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{GM\frac{T^2}{4\pi^2}} = 42227 \text{ km}. \tag{2}$$

Mivel azonban a keringés középpontja a Föld középpontja és nem a felszíne, így ahhoz, hogy a felszíntől vett távolságot kapjuk meg, ebből még le kell vonnunk a Föld sugarát (6371 km). Tehát a geostacionárius műholdak a Föld felszíne felett **35856 km**-rel keringenek.

B.3. feladat

Ahhoz, hogy meghatározzuk a Szaturnusz pályájának fél nagytengelyét, a legkézenfekvőbb megoldás Kepler III. törvényének használata. A törvény szerint a bolygók a Nap körül olyan ellipszispályán keringenek, amelyre a fél nagytengely és a keringési idő közötti reláció a következő:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{áll.} \tag{3}$$

Ha a fél nagytengelyt csillagászati egységekben (a továbbiakban CSE) mérjük, a keringési időt pedig években, akkor az állandó értéke 1 lesz (a Nap körül keringő égitestekre alkalmazva), ezt legegyszerűbben a Föld adatainak behelyettesítésével láthatjuk. Az egyenletet átrendezve $a = T^{2/3}$-t kapunk, ahova behelyettesítve a Szaturnusz keringési idejét (29,46 év) megkapjuk a megoldást: $\mathbf{a}_{♄}$ = **9,54 CSE**.

B.4. feladat

Használjuk a B.3. feladatban is alkalmazott módon Kepler III. törvényét: $T = a^{3/2} = 2536.7$ év. Mivel legutóbb 1997-ban volt perihéliumban, a legközelebbi ilyen esemény **4533**-ben várható.

A perihéliumtávolságot megkaphatjuk úgy, hogy az ellipszis fél nagytengelyéből kivonjuk a lineáris excentricitást (az ellipszis középpontja és fókuszpontja közötti távolságot, jelöljük c-vel). A lineáris excentricitást pedig a fél nagytengely és a (numerikus) excentricitás szorzataként számíthatjuk ki, vagyis $c = ae = 185{,}07$ CSE. A perihéliumtávolság tehát $\boldsymbol{r_p = a - c = 0{,}93}$ **CSE**.

2. Nehezebb feladatok

N.1. feladat

A gravitációs gyorsulás értékét a B.1. feladatban megadott módon számíthatjuk ki: $g = GM/r^2$. Az esés idejének kiszámításához pedig írjuk fel a négyzetes úttörvényt:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{GM}{r^2}t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2sr^2}{GM}} \tag{4}$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat, egy 1 m magasból elejtett test (mindegy, hogy kő vagy toll) $\boldsymbol{t = 1{,}1}$ s alatt esik le a Holdon.

N.2. feladat

A feladat legkézenfekvőbb megoldását Kepler III. törvényének használatával kaphatjuk meg, mely szerint

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$

ahol T a keringési idő, a a pálya fél nagytengelye, γ a gravitációs állandó és M a központi test tömege.

A feladat szerint a sűrűségek arányát csak a keringési idő és a fél nagytengelyek segítségével meg lehet határozni. Legyen $a_n = \alpha_n R_n$ mindkét hold esetére! Írjuk fel a keringési idők hányadosát!

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\frac{a_1^3}{M_1}}{\frac{a_2^3}{M_2}}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3 \frac{R_1^3}{M_1}}{\alpha_2^3 \frac{R_2^3}{M_2}}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3 R_1^3 M_2}{\alpha_2^3 R_2^3 M_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1^3 \rho_2}{\alpha_2^3 \rho_1}}$$

mivel

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}}{\frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}} = \frac{M_1 R_2^3}{M_2 R_1^3}$$

innen pedig már egyértelműen kifejezhető az általunk keresett arány:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

amely a megadott adatok behelyettesítésével:

$$\frac{\rho_{\text{♅}}}{\rho_{\oplus}} = \frac{14{,}41^3}{60{,}3^3} \cdot \frac{27{,}32^2}{5{,}877^2} = \mathbf{0{,}295}.$$

N.3. feladat

A bolygó és a csillag közös tömegközéppont körül keringenek. A csillag távolsága a tömegközépponttól: $x = 8\ \mathrm{CsE} \cdot m/M = 8 \cdot 1{,}85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{CsE} = 18018\ \mathrm{km}$. Megjegyezzük, hogy ez bőven a csillag sugarán belül van, tehát a csillagot nem fogjuk valóban körpályán keringőnek látni, hanem csak imbolyogni fog. A csillagot az alábbi szöggel látjuk elmozdulni (a 21 fényévet átváltottuk km-be):

$$\alpha = \left(\frac{18018\ \mathrm{km}}{1{,}99 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km}}\right) \approx 10^{-5}\ '' \tag{5}$$

Tehát a csillag modulációja $\mathbf{10^{-5}}$ **ívmásodperc**. Mivel a bolygó körpályán kering a csillag körül, ezért ez a moduláció független a rendszr inklinációjától, vagyis attól, hogy milyen szögben is látunk rá.

N.4. feladat

Feltételezzük, hogy a galaxisok kellően távol vannak egymástól, így a megadott szökési sebesség a galaxishalmaz tömegközéppontjához van viszonyítva. A szökési sebességet felírjuk az ismert módon:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

ahol γ gravitációs állandó, M a galaxishalmaz össztömege és R a halmaz középpontjától mért távolság.

Ebből kifejezzük a galaxishalmaz össztömegét:

$$M = \frac{v_0^2 R}{2\gamma}$$

majd az így kapott képletet behelyettesítjük a sűrűség ismert képletébe. Ezen képleten belül a térfogatot egy a halmaz középpontjában felvett R sugarú gömbként számoljuk, azaz:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{v_0^2 R}{2\gamma}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{v_0^2}{\frac{8}{3}\pi\gamma R^2} = \mathbf{8.629 \cdot 10^{-26} \frac{kg}{m^3}}.$$

N.5. feladat

A feladathoz elengedhetetlen a kisbolygó tömegének ismerete. Ennek meghatározására Kepler III. törvényét használhatjuk, azaz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}.$$

Ezt M-re rendezzük, majd a a-ba és t-be helyettesítés után azt kapjuk, hogy $M = 1{,}13 \cdot 10^{14}$ kg. A asztronauta legfőbb problémája a sebesség: ha sebessége meghaladja a második szökési sebességet, akkor egyszerűen lerepül a kisbolygó felszínéről, és önmagától oda többet nem tér vissza. A szökési sebességet az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$v_{\text{szökési}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\frac{GM}{R^2}R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 1{,}736\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ezzel szemben az asztronauta sebessége

$$v_{\text{asztro}} = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{3\text{h}} \approx 2{,}91\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ami nyilvánvalóan nagyobb mint a szökési sebesség, így az asztronauta a küldetést nem tudja teljesíteni.

N.6. feladat

1. rész:

   Ahhoz, hogy a műholdnak perigeuma legyen az adott pontban az kell, hogy ne adjunk sugárirányban sebességet neki, és hogy a sebességének nagyságát növeljük (ha csökkentenénk akkor apogeum lenne). Így tehát az új pálya r_p pericentrumtávolsága megegyezik az r_gst geostacionárius pályasugárral. Tudjuk továbbá, hogy:

   $$r_\mathrm{p} = a(1-e), \tag{6}$$

   ahol a a pálya fél nagytengelye, e pedig az excentricitása.

   Így csak az a fél nagytengelyt kell úgy beállítanunk, hogy az adott r_p esetén e excentricitású legyen. Ehhez azt kell tudnunk, hogy az ellipszispályán mozgó részecske redukált energiáját egyértelműen meghatározza a fél nagytengely az alábbi összefüggésen keresztül:

   $$\frac{E}{m} = -\frac{GM}{2a} \tag{7}$$

   Tudjuk továbbá, hogy a műholdunk teljes redukált energiája:

   $$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r_\mathrm{gst}} \tag{8}$$

   A kettőt egyenlővé téve, az excentricitásos képletet beírva és rendezve kapjuk, hogy a sebességet az alábbira kell beállítani:

   $$v = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{gst}}(1+e)} \tag{9}$$

   Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a jelenlegi sebességével azonos irányban megnöveljük a sebességét az alábbi értékkel:

   $$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{gst}}}\left(\sqrt{1+e}-1\right)} \tag{10}$$

2. rész:

   Lényegében ugyanaz, mint az első rész, csak mivel apogeumban vagyunk, ezért az excentricitást az alábbi képlet adja:

   $$r_\mathrm{a} = (1+e)a \tag{11}$$

   Így látható, hogy mindenhol megváltozik e előjele, így a végeredmény az, hogy az alábbi sebességet kell adnunk a már meglévő sebességhez:

   $$\boldsymbol{\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{gst}}}\left(\sqrt{1-e}-1\right)} \tag{12}$$

   Ez lényegében egy lassítás lesz.

3. rész:

Az 1. rész végképletében $e = 1$-et írva megkapjuk a megoldást, ami az alábbi:

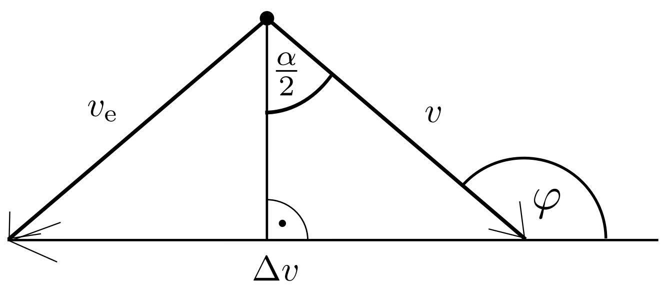
$$\boldsymbol{\Delta v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{GM}}{\boldsymbol{r}_{\mathbf{gst}}}} \left(\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right) \tag{13}$$

Azonban tartsuk észben, hogy ez csak a legegyszerűbb megoldás. Bármilyen megfelelő nagyságú, a Föld irányához képest merőleges sebességű eset jó lesz.

4. rész:

Az egyik feltételünk itt az, hogy körpályán maradunk. Ezt úgy tudjuk teljesíteni, hogy a sebesség nagyságát nem változtatjuk, és irányát is csak úgy, hogy ne legyen radiális komponense.

Az 1. ábrát megnézve ez az alábbi módon teljesíthető. Legyen a hozzáadott sebesség nagysága $\boldsymbol{\Delta v = 2v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, ahol α a kezdeti és eredő sebességek által bezárt szög. Legyen a Δv és a v által bezárt szög φ! Ekkor a v_{e} eredő sebesség $\boldsymbol{\alpha = 2\varphi - 180°}$ szöget zár be a v eredeti sebességgel.



1. ábra:

5. rész:

Itt csak egy v-vel megegyező nagyságú sebességet kell kivonnunk v-ből, azaz meg kell állítanunk a pályáján a műholdat. Természetesen eközben adhatunk neki egy tetszőleges sugárirányú sebességet.

6. rész:

Ez a feladat lényegében ugyanaz, mint a 4. rész, csak i-t egyenlővé kell tenni α-val, hiszen a geoszinkron pálya ugyanolyan mint a geostacionárius, csak el van ahhoz képest fordulva.

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D.1. feladat

Tegyük fel, hogy egy átlagos ember kb. 10 méter magasra tud feldobni egy követ a Földön. Írjuk fel az energiamegmaradást: $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$, vagyis $v_0 = \sqrt{2gh} = 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-os kezdősebességet tudunk adni a kőnek.

Nézzük meg most, hogy hogyan függ a szökési sebesség a bolygó sugarától! Ugyebár a kérdésben szereplő bolygóra pont v_0 kell legyen a szökési sebesség, vagyis $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{8}{3}G\pi\varrho r^2}$, ahol az utóbbi alakban kifejeztük a tömeget a sugárral és a sűrűséggel ($M = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho$). Átírva a kapott formulát kifejezhető a sugár:

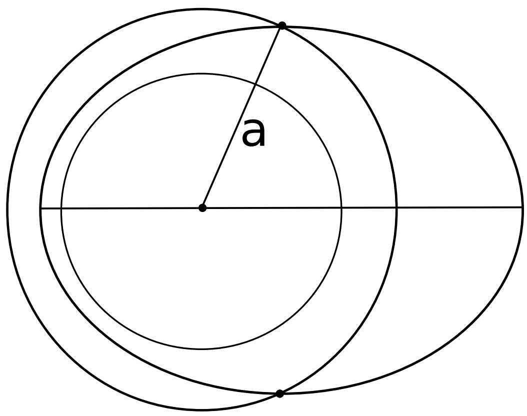
$$r = \sqrt{\frac{3}{8}v_0^2\frac{1}{G\pi\varrho}}. \tag{14}$$

Ebbe a kifejezésbe be kell helyettesítsük a Föld sűrűségét, amit annak tömegéből és sugarából számíthatunk ki, az eredmény: $\varrho_\oplus = 5513\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Ezt beírva megkapjuk a keresett bolygó sugarát: **7976 m**. Ellenőrizhetjük is a kapott eredményt: beírva a képletbe a földi szökési sebességet, jó közelítéssel meg fogjuk kapni a Föld sugarát.

Megjegyzés: láthatjuk, hogy a kis herceg bolygóját földi sűrűségűnek feltételezve arról is bőven el lehetne dobni így egy követ.

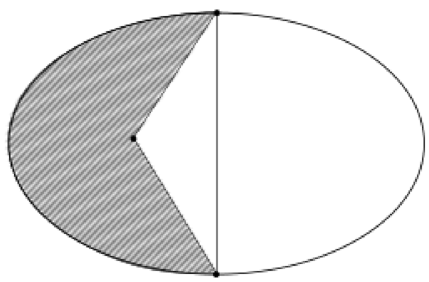
D.2. feladat

Nézzük meg, hogy a pályaellipszis mely részei esnek a lakhatósági zónába! Tudjuk a feladat szövegéből, hogy a lakhatósági zóna külső határa egybeesik a fél nagytengellyel. Az ellipszis definíció szerint olyan pontok halmaza a síkon, amelyeknek a két fókuszponttól mért távolságösszege állandó. Ez az állandó pedig éppen $2a$ (ha ezt nem tudjuk, számítsuk ki a pericentrumra vagy az apocentumra). Az ellipszisen annak középpontja feletti és alatti pont (ld. 2. ábra) emiatt éppen a távolságra lesz mindkét fókusztól, hiszen szimmetrikus az ellipszis, és $2a/2 = a$. Tehát azt már tudjuk, hogy ezen két ponton metszi a lakhatósági zóna külső köre az ellipszist.



2. ábra:

Vajon hol metszi a belső kör? Ellenőrizzük először, hogy metszi-e egyáltalán. Az ellipszisnek a fókuszhoz legközelebbi pontja a pericentum, aminek a távolsága: $r_\mathrm{p} = a - c = a(1-e) = 3{,}2$ CSE, ez tehát a lakhatósági zónán belül van. A kérdés tehát az, hogy az ellipszisnek a pericentrumhoz közelebbi felét a keringési idő hányad része alatt teszi meg a bolygó. Mivel itt gyorsabban halad Kepler II. törvénye miatt, 50%-nál kisebb értéket várunk.



3. ábra:

Kepler II. törvénye kimondja, hogy a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Használjuk ki ezt! Így csak a 3. ábrán látható bevonalkázott területet kell összehasonlítani az ellipszis teljes területével. A teljes terület: $T = ab\pi = 49{,}26\ \mathrm{CSE}^2$. A háromszög területe (alapja $2b$, magassága c): $T_h = \frac{2bc}{2} = bc = 3{,}14\ \mathrm{CSE}^2$. Innen pedig a vonalkázott terület: $T_v = \frac{T}{2} - T_h = 21{,}49\ \mathrm{CSE}^2$. Ez pedig az eredeti területnek **43,6%**-a.

D.3. feladat

A megoldás lényege az a felismerés, hogy a fény véges sebessége miatt a Seneca körül keringő űrszonda jeleiből arról kapunk információt, hogy a kisbolygó milyen távol van a Földtől. Így azt az információt adja meg a feladat szövege, hogy mi a legkisebb és legnagyobb távolság ami a Föld és a Seneca között kialakulhat. Számoljuk ki, hogy a megadott időtartamok mekkora távolságnak felelnek meg:

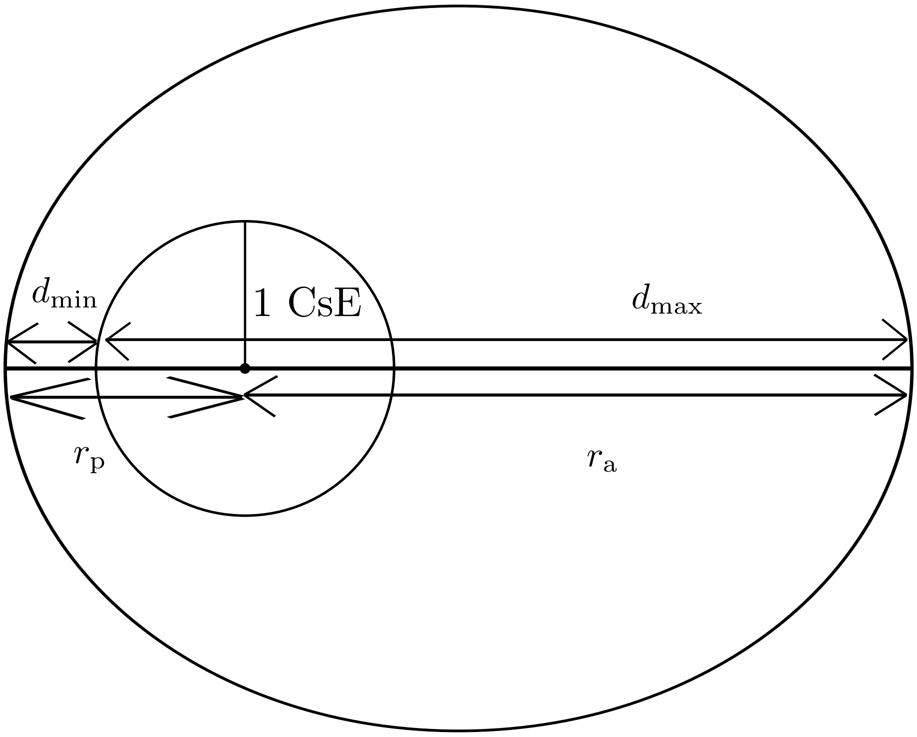
$$d = c\Delta t, \tag{15}$$

ahol d a Seneca távolsága a Földtől, $c = 3 \times 10^8$ m/s a fénysebesség, Δt a rádiójel Földhöz éréséhez szükséges idő. Beírva a feladatban szereplő időket kapjuk, hogy

$$d_{\mathrm{min}} = 0{,}24 \text{ CSE} \qquad d_{\mathrm{max}} = 4{,}68 \text{ CSE} \tag{16}$$

(1 CsE= $1{,}5 \times 10^{11}$ m)

Ezek alapján a Seneca ellipszispályáját a Föld körpályájához képest fel lehet rajzolni. Ehhez vegyük észre, hogy a Seneca pályája nem metszheti a Föld pályáját, mivel ekkor kialakulhatna olyan helyzet amikor gyakorlatilag 0 perc alatt eléri a Földet a jel. Az pedig, hogy a Seneca pályája a Föld pályáján belül helyezkedjen el azért nem lehetséges, mert a legnagyobb távolság esetén (4,68 CSE) messzebb van a Földtől mint a Föld pályasugarának kétszerese (2 CSE). Ezért tehát arra jutunk, hogy a Seneca pályája a Földpáylán kívül helyezkedik el (lásd 4. ábrát).



4. ábra:

Az ábra alapján kifejezhetjük a Seneca pályájának pericentrum távolságát (r_{p}) és apocentrum távolságát (r_{a}) a d_{min} és d_{max} értékeivel az alábbi módon:

$$r_{\mathrm{p}} = d_{\min} + 1 \text{ CSE} \qquad r_{\mathrm{a}} = d_{\max} - 1 \text{ CSE} \tag{17}$$

$$r_{\mathrm{p}} = 1{,}24 \text{ CSE} \qquad r_{\mathrm{a}} = 3{,}68 \text{ CSE} \tag{18}$$

Ezután szeretnénk meghatározni a Seneca pályájának a félnagytengelyét és e excentricitását. Ezt a közel- és távolpontok ismeretében az alábbi összefüggésekkel tehetjük meg:

$$a = \frac{r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}}}{2} \tag{19}$$

$$e = 1 - \frac{r_{\mathrm{p}}}{a} \tag{20}$$

Így a Senecá-ra az alábbi értékeket kapjuk:

$$\mathbf{a = 2{,}46 \text{ CSE} \qquad e = 0{,}496} \tag{21}$$

A félnagytengely ismeretében a pályaperiódust Kepler III. törvénye alapján számolhatjuk ki, ami a Naprendszerre az alábbi alakú, ha csillagászati egységben és évben számolunk:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \tag{22}$$

Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{T = 3{,}86 \text{ év}} \tag{23}$$

A két oppozíció között eltelt időt, úgy kaphatjuk meg, ha kiszámoljuk a Seneca és a Föld relatív átlagos szögsebességét:

$$\omega_{\mathrm{rel}} = \omega_{\mathrm{F}} - \omega_{\mathrm{S}} \tag{24}$$

Beírva, hogy az átlagos szögsebesség $\omega = 2\pi/T$, ahol T a keringési idő és az egész egyenletet 2π-vel osztva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{T_{\mathrm{sin}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{F}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{S}}} \tag{25}$$

Innen a T_{sin} szinodikus keringési időre az alábbi képletet kapjuk:

$$\frac{1}{\frac{1}{1 \text{ év}} - \frac{1}{3{,}86 \text{ év}}} \tag{26}$$

Innen, mivel ez éppen megegyezik a Δt két oppozíció között eltelt idővel, ezért a végeredmény:

$$\boldsymbol{\Delta t = 1{,}35 \text{ év}} \tag{27}$$

D.4. feladat

Legyen az űrszonda sebessége indításkor v. Mivel az űrszonda az indítás után nem használta hajtóműveit, azaz mesterséges módon nem változtatta sebességét, ezért a szonda összenergiája, mely a kinetikus (mozgási) és a helyzeti (gravitációs) energiából tevődik össze, nem változik. Eszerint írhatjuk, hogy

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{áll.},$$

azaz

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{GmM}{R+H} = \text{áll.}$$

Itt a vonzócentrumtól (Föld) vett távolságot felbontottuk két részre: a Föld sugarára és a felszíntől mért távolságra. Az egész kifejezést leosztva a szonda tömegével és bevezetve a h energiaállandót azt kapjuk, hogy:

$$v^2 - \frac{2GM}{R+H} = 2h.$$

A feladatban leírt adatok segítségével ezt az egyenletet azonnal meg tudjuk oldani h-ra, ezzel megkapva a szonda mozgását leíró egyik fontos paramétert:

$$2h = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0} = 14{,}77\frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$$

A pálya alakjára ebből azonnal következtetni lehet: ha a kinetikus energia pont megegyezik a gravitációssal, vagyis amikor a test sebessége pontosan a szökési sebesség, az energiaállandó értéke nulla és a test egy parabola alakú pályán mozog. Itt az energiaállandó pozitív, azaz nagyobb a kinetikus energia a gravitációsnál, a szökési sebességnél nagyobb sebességgel halad a szonda, így a pályája hiperbola alakú lesz.

A fenti energiaegyenletből azonban nem tudunk azonnal következtetni az indítási magasságra, ezt a helyi szökési sebesség kiszámításával kaphatjuk meg. Mint fentebb említettem, a szökési sebesség az energiaegyenletből is kijön, $h = 0$ esetre:

$$v_{\text{szök}} = \sqrt{\frac{2GM}{R+H}},$$

ezzel átírva az energiaegyenletet azt kapjuk, hogy

$$v^2 - v_{\text{szök}}^2 = 2h.$$

Más részről viszont a feladatban ki volt kötve, hogy

$$v - v_{\text{szök}} = d.$$

Az előző két egyenletben két ismeretlen van, egyenletrendszerként oldhatjuk meg őket mind a két sebességre. Ehhez első lépésként az

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

azonosságot felhasználva leosztjuk az első egyenletet a másodikkal, így az egyenletrendszerünk:

$$v + v_{\text{szök}} = \frac{2h}{d} \qquad v - v_{\text{szök}} = d.$$

Mondjuk a második egyenletből kifejezve az egyik sebességet és azt visszahelyettesítve az első egyenletbe, majd visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$v = \frac{1}{2}\left(d + \frac{2h}{d}\right), \qquad v_{\text{szök}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2h}{d} - d\right).$$

Itt már minden értéket ismerünk, be tudunk helyettesíteni az egyes sebességekben. A kapott értékek:

$$v = 11{,}5\frac{\text{km}}{\text{s}} \qquad v_{\text{szök}} = 10{,}8\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A $v_{\text{szök}}$ ismeretében pedig már a keresett felszín feletti magasságot (H) is ki tudjuk számolni, mindössze a szökési sebesség képletét kell rendeznünk a magasságra:

$$H = \frac{2GM}{v_{\text{szök}}^2} - R = 356.8\text{km}.$$

D.5. feladat

1. Az ábráról látszik, hogy a transzfer orbit fél nagytengelye $2a_T = a_{\text{Föld}} + a_{\text{Mars}}$, ennek megfelelően a hozzá tartozó keringési periódus Kepler III. törvényéből következően $P_T = a_T^{3/2}$ lesz. Ezáltal a_T=1.26 AU és P_T=1.41 év. A Marsra történő utazás csak a periódus felét veszi majd igénybe, így az utazás időtartama $P_T/2 \approx 8.5$ hónap lesz.

   A szonda perihéliumbeli sebességének számolásához az N.6. feladatnál levezetett formulát használhatjuk, mely

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

   amely a perihélium távolság (1 AU) és a fentebb számolt fél nagytengely behelyettesítése után a $v_p = 32.75$ km/s értéket adja.

2. Mivel ismert volt a perihéliumbeli sebesség, ezért a fenti képlet átrendezésével megkaphatjuk a pálya fél nagytengelyét:

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_p} - \frac{v_p^2}{GM}}$$

   amelybe ha behelyettesítjük az ismert értékeket, akkor $a = 1.3664$ AU-t kell kapnunk.

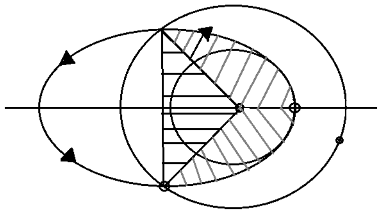
   Kepler III. törvénye alapján a fél nagytengely és a keringő test periódusa erősen összefügg, ennek megfelelően a periódusra $P \approx 583.397$ nap adódik.

   Kepler II. törvényéből tudjuk, hogy a szonda úgy mozog, hogy a tőle a Naphoz húzott vezérsugár egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol. Tehát az időtartamok egyenesen arányosak az ellipszis egyes területszeleteivel.

   Kepler II. törvényével való számoláshoz azonban szükségünk van a pályát leíró paraméterekre. Mivel ismerjük a pálya fél nagytengelyét, valamint perihéliumtávolságát, vissza tudjuk számolni az ellipszispálya excentricitását:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0.268.$$

   Ha ezzel kiszámoljuk a pálya aféliumát, akkor a Mars nagytengelyénél nagyobb értéket kapunk, vagyis egyenlőre még elérhetőnek tűnik a Mars.



5. ábra: Segédábra az ellipszis felosztásához

Az ábrán szürkével satírozott térrész területe elemi módszerekkel nem lenne számolható, azonban itt fel kell ismernünk, miért olyan fontos, hogy a Mars pályájának két metszéspontja jelöli ki a kistengely ebben a speciális esetben: ekkor feldarabolható az ellipszis egy félellipszisre, egy egyenlő szárú háromszögre, valamint további két, azonos területű részre. Tehát meg tudjuk határozni az ellipszis és a háromszög területét, a fennmaradó terület pedig a maradék két részhez fog tartozni. Az ellipszis területéhez ismernünk kell a kis féltengelyét. Ehhez volt megadva az excentricitás, ugyanis mint ismeretes

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

innen pedig $b = 1.3164$ AU. Ennek segítségével már ki tudjuk számolni az ellipszis által bezárt területet ($T = \pi ab$), ami $T = 5.651$ AU^2. Ezek után már csak a háromszög által bezárt területet kell számolnunk, melynek alapja az ellipszis kistengelye, magassága pedig $a - r_p$ lesz a geometriából adódóan. Ennek megfelelően a területe:

$$T_h = \frac{2b \cdot (a - r_p)}{2} = 0.4824 \text{ AU}^2$$

Ha ezt az értéket levonjuk a fél ellipszis területéből, akkor megkapjuk azt a területet, melyet a könnyen nem számolható részek lefednek. Az ezek által lefedett terület $T_{szelet} \approx 2.34$ AU^2. Ennek a fele nyilván egy ilyen kis rész területe. Az szeretnénk számolni, hogy mennyi idő telik el a Mars pályájának második metszéséig a kilövéstől számítva: ezt egyszerűen úgy tudjuk számolni, hogy a teljes periódusból levonjuk a az egyik kis rész mentén töltött időt. Kepler II. törvénye alapján ez az idő arányos a területtel, tehát egyszerű arányosságból következően (a szelet területének felét el kell osztani a teljes területtel, ugyanez az arányosság igaz az ott töltött időkre) azt kapjuk, hogy körülbelül 462.4 nap múlva ér a Tesla a második metszésponthoz.

A kérdés az, hogy hol lesz ekkor a Mars, illetve a kiindulástól számítva hány nap alatt ér oda. A Mars a kilövéskor $60° + 180° + 2.33° = 242.33°$-ra volt a találkozási ponttól. A teljes keringési periódussal összevetve

$$\frac{242.33°}{360°} \cdot 687 \text{ d} \approx 462.45 \text{ d},$$

tehát a Tesla és a Mars egy időben lesz egy helyen, vagyis sikeresnek mondható a küldetés.