Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia Szakkör 2020-21 3. Asztrofizika II. Megoldások

Dálya Gergely, Benkóczy Levente, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

2020. október 24.

1. Bemelegítő feladatok

B1. feladat

Írjuk fel a Pogson-képletet:

$$m_\odot - m_V = -2{,}5 \cdot \log_{10}(I_\odot / I_V) \tag{1}$$

Fejezzük ki az intenzitások arányát:

$$I_\odot / I_V = 10^{-0{,}4\cdot(m_\odot - m_V)} = 10^{10{,}708} = 5{,}1 \cdot 10^{10} \tag{2}$$

Ez az arány azt mondja meg, hogy adott idő alatt mennyivel több fény érkezik be a Napról mint a Vegáról, ami éppen az ahányszor több ideig kell néznünk a Vegát, hogy ugyanannyi fény érje szemünket. Tehát ezt beszorozva 1 másodperccel kapjuk a végeredményt:

$$\boldsymbol{\Delta t = 5{,}1 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s} = 1618\ \text{év}} \tag{3}$$

B2. feladat

Első lépésben határozzuk meg a Deneb abszolút fényességét (M) a távolság modulus képletével:

$$m - M = 5 \cdot \log_{10} d - 5, \tag{4}$$

ahol m a látszó fényesség, d pedig a távolság parszekben mérve.

Átalakítva:

$$M = m + 5 - 5 \cdot \log_{10} d \tag{5}$$

Emellett ismert, hogy a π parallaxisszög ismeretében a távolság:

$$d[pc] = \frac{1}{\pi['']} \tag{6}$$

Ezt beírva az M-et megadó képletbe:

$$M = m + 5 - 5 \cdot \log_{10} \frac{1}{\pi} \tag{7}$$

Ismert, hogy $m = 1{,}25$ és $\pi = 2{,}29$ mas $= 0{,}00229''$. Ezeket beírva kapjuk az abszolút magnitudót:

$$M_D = -6{,}95 \tag{8}$$

Innen a luminozitást a Pogson-képlet segítségével kaphatjuk:

$$M_D - M_\odot = -2{,}5 \cdot \log_{10} \frac{L_D}{L_\odot} \tag{9}$$

Átrendezve kapjuk, hogy:

$$L_D = L_\odot \cdot 10^{-0{,}4 \cdot (M_D - M_\odot)} = L_\odot \cdot 10^{4{,}71} = 51\,523 \cdot L_\odot \tag{10}$$

Beírva a Nap luminozitását ($L_\odot = 3{,}846 \cdot 10^{26}$ W):

$$\boldsymbol{L_D = 1{,}98 \cdot 10^{31}\ \mathrm{W}} \tag{11}$$

B3. feladat

Mivel a luminozitás a csillag egységnyi idő alatt történő energiakibocsátását adja meg, a csillag fősorozaton töltött ideje egyenesen arányos lesz az összes energiájával és fordítottan arányos a luminozitásával, vagyis $t \sim E/L$. Mivel az energiatermelés fúzióval történik, aminek során tömeg alakul át energiává: $E = mc^2$, mivel minket az arányok érdekelnek: $E \sim m$. Kihasználva a tömeg-luminozitás relációt is:

$$t \sim \frac{M}{L} \sim \frac{M}{M^{3{,}5}} = M^{-2{,}5}, \tag{12}$$

vagyis $t \cdot M^{2{,}5} = \text{const}$. Tehát:

$$t_\odot M_\odot^{2{,}5} = t_{cs} M_{cs}^{2{,}5} \quad \rightarrow \quad t_{cs} = t_\odot \left(\frac{M_\odot}{M_{cs}} \right)^{2{,}5} \tag{13}$$

Az adatokat behelyettesítve: $\boldsymbol{t_{cs} = 1{,}79 \cdot 10^8}$ év.

B4. feladat

A csillag élettartama alatt a fősorozaton maradás várható időtartamát értjük. Értelemszerűen feltételezzük, hogy a csillagok élettartama egyenesen arányos a csillag tömegével és fordítottan arányos annak luminozitásával, mivel utóbbi közvetlen kapcsolatban van a csillag anyagának "felhasználódásával". Tehát

$$t \sim \frac{M}{L}.$$

Ezen felül tudjuk még, hogy a csillagok fősorozatbeliek, tehát érvényes rájuk az empirikus tömeg-fényesség reláció, mely

$$L \sim M^{3.5}.$$

Ezen összefüggést a várható élettartamba visszaírva kapjuk, hogy

$$t \sim M^{-2.5},$$

vagyis két csillag várható élettartamának arányát a tömegek arányából megkaphatjuk. Eszerint

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{2.5} = \left(\frac{0.8}{23.6}\right)^{2.5} = 2.12 \cdot 10^{-4}$$

Tehát a kisebb tömegű csillag $1/(2.12 \cdot 10^{-4})$-szor, vagyis körülbelül **4730-szor** több ideig fog élni, vagyis a fősorozaton jelenlegi pozíciójában maradni mint a másik, nagyobb tömegű csillag.

B5. feladat

Első lépésként kiszámítjuk az objektum luminozitását, ehhez a távolságmodulus képletéből kiszámoljuk az abszolút magnitúdóját, majd ezt írjuk be a Pogson-formulába:

$$M_V = m_V + 5 - 5\log_{10} d = -26{,}47^{\mathrm{m}}$$

$$M_V - M_{V,\odot} = -2{,}5 \log_{10} \frac{L}{L_\odot}$$

amiből

$$L = 1{,}2 \cdot 10^{39}\mathrm{W}.$$

Ezt visszaírva az Eddington-határ képletébe azt kapjuk a tömegre, hogy

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3.2 \cdot 10^4} \left(\frac{L}{L_\odot}\right) \mathcal{M}_\odot \approx 2{,}07 \cdot 10^3 8 \text{ kg}$$

Ez óriási tömeg, ekkorával csillagok nem rendelkezhetnek, ez egy szupernagy tömegű fekete lyuk tömegének felel meg. Tehát az objektum nem egy csillag, hanem egy óriási fekete lyuk, egy kvazár (nagy tömegű fekete lyuk akkréciós koronggal, utóbbi kisugárzása okozza az objektum hatalmas luminozitását).

A Schwarzschild-sugarat a már korábban ismert formula alapján számolhatjuk:

$$R = \frac{2G\mathcal{M}}{c^2} = 3{,}07 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

2. Nehezebb feladatok

N1. feladat

Írjuk össze, hogy mit tudunk a csillagról!

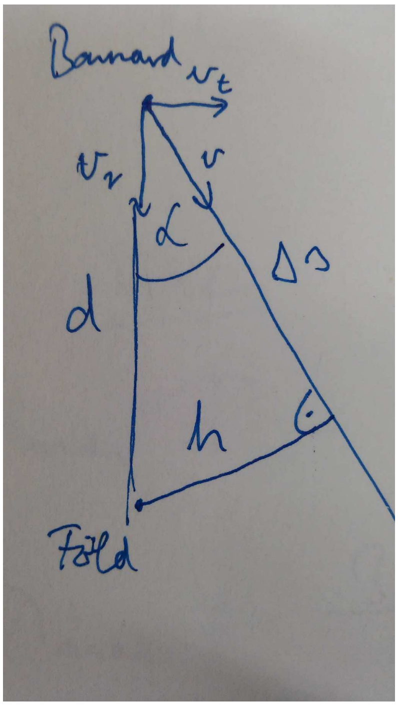
Parallaxisa $\pi = 545{,}4$ mas $= 0{,}5454''$. Ebből kapjuk, hogy a távolsága $d = 1/\pi = 1{,}834$ pc.

Sajátmozgása a 10 év alatt megtett $51{,}5''$-es elmozdulásából $\mu = 5{,}15\ ''/\text{év}$. Ebből és a távolságából kiszámolható tangenciális sebessége:

$$v_t = \mu d = 9{,}4451\ \frac{''\text{pc}}{\text{év}} = 44{,}89\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{14}$$

Radiális sebessége is ismert ($v_r = -110{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$), azaz innen már geometriai úton kiszámíthatóak a kérdezett értékek.

Tekintsük az alábbi ábrát:



A keresett legközelebbi távolságot (h) egy szögfüggvénnyel számolhatjuk:

$$h = d \sin\alpha = d\frac{v_t}{v} = d\frac{v_t}{\sqrt{v_t^2 + v_r^2}}, \tag{15}$$

ahol v a csillag eredő sebessége.

Innen:

$$\boldsymbol{h = 0{,}69\ \mathbf{pc}}$$

Az odáig jutás idejét pedig az alábbi módon számolhatjuk:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{d\cos\alpha}{v} = \frac{d\frac{v_r}{v}}{v} = \frac{dv_r}{v_r^2 + v_t^2} \tag{16}$$

Innen a végeredmény:

$$\boldsymbol{\Delta t = 4{,}4 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s}}$$

Azaz a Barnard-csillag **14 ezer év** múlva ér legközelebb a Naphoz.

N2. feladat

Jelöljük m-mel és I-vel az 1 albedójú Vénusz magnitúdóját és intenzitását, m_V-vel és I_V-vel a 0,65-ös albedójúét! A két égitest intenzitásaránya:

$$\frac{I}{I_V} = \frac{I}{0{,}65 \cdot I} = \frac{1}{0{,}65} \tag{17}$$

Felírva a Pogson-képletet megkaphatjuk a hipotetikus Vénusz látszó magnitúdóját:

$$\boldsymbol{m = m_V - 2{,}5 \log \frac{1}{0{,}65} = -5{,}07^m} \tag{18}$$

N3. feladat

A feladat megoldása során a Pogson-formulát fogjuk használni. Észben kell tartanunk, hogy a fedés csak részleges, tehát a maximális fedés esetén is ki fognak látszani egymás mögül a csillagok. Legyen m_r a rendszer fényessége, $m_1 = 4.1$ mg, illetve $m_2 = 3.7$ mg. A fedésekkori fényességek számolásának módja:

$$m_r - m_f = -2.5 \log_{10} \frac{I_r}{I_r - \Delta I} = -2.5 \log_{10} \frac{I_1 + I_2}{I_1 + I_2 - \Delta I},$$

ahol ki lett használva, hogy $I_r = I_1 + I_2$, azaz a komponense intenzitásai összeadódnak. Ennek segítségével létrehozhatunk egy egyenletrendszert a két fedésre; itt felhasználhatjuk, hogy $I \alpha F \cdot A$, ahol A a látszó felület, mely alapesetben egy korong ($A = \pi R^2$):

$$m_r - m_1 = -2.5 \log_{10} \frac{I_1 + I_2}{F_1(\pi R_1^2 - \Delta A) + I_2}$$

$$m_r - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{I_1 + I_2}{I_1 + F_2(\pi R_2^2 - \Delta A)}$$

Az intenzitások képletében levő konstansokkal egyszerűsítettünk, mivel mindegyikben ugyanazok. Itt ΔA az elfedett térrész, amely bent van a másik komponens mögött. A rendszer szimmetriájából adódóan ez a két terület meg fog egyezni, de az elfedett intenzitás az eltérő fluxusok miatt már nem. Ha átrendezzük ezeket az egyenleteket és a könnyebb kezelhetőség érdekében beírjuk a magnitúdókat, akkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$10^{-0.4(m_r - m_1)} \cdot (F_1(\pi R_1^2 - \Delta A) + I_2) = I_1 + I_2$$

$$10^{-0.4(m_r - m_2)} \cdot (I_1 + F_2(\pi R_2^2 - \Delta A) = I_1 + I_2$$

A két egyenlet jobb oldala megegyezik, célszerű a két egyenletet kivonni egymásból, azaz

$$10^{-0.4(m_r-m_1)} \cdot (F_1(\pi R_1^2 - \Delta A) + I_2) = 10^{-0.4(m_r-m_2)} \cdot (I_1 + F_2(\pi R_2^2 - \Delta A)$$

ezt átírva:

$$10^{-0.4(m_2-m_1)}(I_1 + I_2 - F_1\Delta A) = (I_1 + I_2 - F_2\Delta A)$$

Ha elnevezzük a $10^{-0.4(m_2-m_1)}$-t C-nek a ΔA az alábbi módon fejezhető ki:

$$\Delta A = \frac{(F_1 R_1^2 + F_2 R_2^2)(C-1)}{CF_1 - F_2}$$

Ebbe behelyettesítve a kapott adatokat:

$$\Delta A = 23.03 R_\odot^2.$$

N4. feladat

A feladatot a gázok mozgására vonatkozó energiaegyenlet felírásával kezdjük:

$$\frac{f}{2} k_\mathrm{B} T_\mathrm{T} \approx \frac{1}{2} m_\mathrm{g} v^2$$

Itt az f a gáz szabadsági fokainak száma. A közelítés a feladatban kevésbé jelentős potenciálok miatt van (pl: gázatomok gravitácós energiája), melyeket elhanyagolunk. Mivel a gáz egyatomos, ezért $f = 3$, vagyis az egyenletünk, a moláris tömeg és az Avogadro-szám bevezetésével a következő alakú lesz:

$$3 k_\mathrm{B} T_\mathrm{T} \approx \frac{M_\mathrm{g}}{N_\mathrm{A}} v^2$$

ezt a sebességre rendezve:

$$v \approx \sqrt{\frac{3 k_\mathrm{B} T_\mathrm{T} N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{g}}}$$

Ahhoz, hogy az atmoszférában maradjon, a feltétel szerint teljesülnie kell annak, hogy

$$v < \frac{v_\text{szök}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2GM_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}}$$

azaz ha ide beírjuk a gázatomok átlagos sebességére kapott képletet:

$$\sqrt{\frac{3 k_\mathrm{B} T_\mathrm{T} N_\mathrm{A}}{M_\mathrm{g}}} < \sqrt{\frac{GM_\mathrm{T}}{18 R_\mathrm{T}}}.$$

Ha ezt rendezzük a gáz tömegére, akkor azt kapjuk, hogy

$$M_\mathrm{g} > \frac{54 k_\mathrm{B} N_\mathrm{A} T_\mathrm{T} R_\mathrm{T}}{GM_\mathrm{T}}$$

amelybe ha behelyettesítjük az adatokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$M_{\mathrm{g}} > 13.2\mathrm{g}.$$

A feladat viszont a relatív atomtömegre kérdezett, ez viszont a moláris tömeg. A relatív atomtömeg (közelítőleg) azt fejezi ki, hogy hányszor nehezebb az anyag a protonnál (hidrogén atommagnál), így a jelen esetben értelemszerűen

$$\mathbf{A_{\mathrm{min}}=13.2}$$

N5. feladat

A megoldáshoz egyszerűen beírjuk a kapott adatokat az $N(m) \sim e^{0.307m}(1-e^{3(m^*-m)}$ egyenletbe, majd megoldjuk az így kapott egyenletrendszert:

$$3 = k \cdot e^{0.307m_1}(1 - e^{3(m^*-m_1)}) \tag{19}$$

$$5 = k \cdot e^{0.307m_2}(1 - e^{3(m^*-m_2)}) \tag{20}$$

képezzük ezen két egyenletnek a hányadosát! Ekkor k kiesik, csak m^* marad az egyenletünkben:

$$\frac{3}{5} = e^{0.307(m_1-m_2)} \cdot \frac{1 - e^{3m^*} \cdot e^{-3m_1}}{1 - e^{3m^*} \cdot e^{-3m_2}} \tag{21}$$

itt az átalakítás során az azonos alapú hatványok osztására és szorzására vonatkozó azonosságokat használtuk. Átszorozva a nevezővel, majd csoportosítva a kapott tagokat azt kapjuk, hogy :

$$\frac{3}{5} - e^{0.307(m_1-m_2)} = (\frac{3}{5}e^{-3m_2} - e^{0.307(m_1-m_2)}e^{-3m_1})e^{3m^*}. \tag{22}$$

Itt leosztunk a jobb oldalon levő együtthatóval, majd az egyenlet természetes alapú logaritmusát vesszük, és osztjuk mindkét oldalt hárommal, azaz kifejezzük m^*-ot:

$$m^* = \frac{1}{3} \ln \frac{\frac{3}{5} - e^{0.307(m_1-m_2)}}{e^{-3m_2}(\frac{3}{5} - e^{-2.693(m_1-m_2)})} \tag{23}$$

Ha ebbe behelyettesítjük az adott m_1-et és m_2-t, akkor megkapjuk, hogy

$$\boldsymbol{m^* = 22{,}56^m} \tag{24}$$

Ha már az első lépesektől kezdve behelyettesítgettünk, akkor a hányadosképzés után kapott egyenlet számokkal:

$$0{,}6 = 0{,}863 \cdot \frac{1 - e^{3m^*} \cdot (1{,}459 \cdot 10^{-30})}{1 - e^{3m^*} \cdot (3{,}456 \cdot 10^{-31})} \tag{25}$$

Beszorozva a nevezővel, majd rendezve:

$$1{,}051 \cdot 10^{-30}\ e^{3m^*} = 0{,}263 \tag{26}$$

Az osztás után az egyenlet logaritmusát vesszük:

$$m^* = \ln(0{,}25 \cdot 10^{30}) \tag{27}$$

ez szintúgy a fenti eredményt adja. Ha a kapott látszólagos fényességet behelyettesítjük a távolságmodulus képletébe, és felhasználjuk az adott $M^* = -4{,}48$ értéket, akkor a távolságra azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{d = 2{,}56\ \mathrm{Mpc}} \tag{28}$$

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D.1. feladat

Írjuk fel a Pogson-képletet!

$$m_{\text{össz}} - m_1 = -2{,}5 \cdot \log_{10}(I_{\text{össz}}/I_1) \tag{29}$$

Az intenzitások összeadódnak:

$$I_{ö} = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + 4I_4 + 5I_5 \tag{30}$$

A Pogson-képlettel kifejezhetjük a különböző I-ket I_1 segítségével, pl. $I_2 = I_1 \cdot 10^{-2/5}$, így:

$$\frac{I_{ö}}{I_1} = 1 + \frac{2}{10^{2/5}} + \frac{3}{10^{4/5}} + \frac{4}{10^{6/5}} + \frac{5}{10^{8/5}} = 2{,}65 \tag{31}$$

Innen az összfényesség (mivel $m_1 = 1^m$):

$$m_{ö} = 1 - 2{,}5 \log_{10} 2{,}65 \tag{32}$$

$$\boldsymbol{m_{ö} = -0{,}058^m} \tag{33}$$

Ha n-nel tartunk a végtelenhez:

$$\frac{I_{ö}}{I_1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10^{2n/5}} = 2{,}7603, \tag{34}$$

ahonnan:

$$\boldsymbol{m_{ö} = -0{,}1024^m} \tag{35}$$

D.2. feladat

Tekintsük a felületi fényesség képletét:

$$S[\text{mag/arcsec}^2] = m + 2{,}5 \cdot \log_{10} A[\text{arcsec}^2] \tag{36}$$

(a)
A galaxis fényessége $m = 9{,}2$ ismert. Számítsuk ki most az A felületét!

$$A = r^2\pi, \tag{37}$$

ahol r a galaxis látszó sugara, jelen esetben $d/2 = 5'$. Így:

$$A = (5')^2\pi = 25\pi \text{ arcmin}^2 = 25\pi 60^2 \text{ arcsec}^2 = 282743{,}3 \text{ arcsec}^2 \tag{38}$$

Ezt beírva kapjuk a galaxis felületi fényességét:

$$\boldsymbol{S_g = 22{,}8} \tag{39}$$

(b)
Vegyük észre, hogy S távolságfüggetlen, hiszen $I \propto 1/r^2$ és $A \propto 1/r^2$, így $A \propto I$ azaz $A/I =$ áll. A felületi fényesség pedig igazából ennek a logaritmusa, tehát távolságfüggetlen.

Így a galaxist úgy képzelhetjük el mint kb. Nap felületi fényességű és teljesen sötét részek. Mi ezek arányára vagyunk kíváncsiak. Számítsuk ki ezért a Nap felületi fényességét!

$$S_\odot = m + 2{,}5 \cdot \log_{10} A \tag{40}$$

Ismert, hogy $m = -26{,}74$ és mivel $d = 0{,}5°$ ezért kiszámítható, hogy $A = 10178760{,}2$ arcsec^2. Innen a Nap felületi fényessége:

$$S_\odot = -9{,}2 \tag{41}$$

Felírható egy Pogson-képlet a keresett felületarányra, mivel $I \propto A$:

$$S_g - S_\odot = -2{,}5 \cdot \log_1 0(A/A_{cs}), \tag{42}$$

ahol A_{cs} a csillagok által kitakart, A pedig a teljes felülete a galaxisnak. Innen a $k = (A_{cs}/A)$ arányra az alábbi eredményt kapjuk:

$$\boldsymbol{k = 1{,}58 \cdot 10^{-13}} \tag{43}$$

Látható tehát, hogy a csillagok alig takarnak ki valamit a háttérből.

D.3. feladat

A cefeida távolságát a Pogson-képlettel fogjuk tudni meghatározni, de ehhez szükségünk van a két magnitúdóra. A 2. ábráról leolvasható a csillag pulzációs periódusa, amelyre ≈ 12 napot kapunk (érdemes két egymástól távoli maximum időkülönbségét venni és elosztani azzal, hogy hány periódus telt el a kettő között, ugyanis ezáltal a leolvasásunk hibáját csökkenthetjük). A cefeida átlagos látszó magnitúdójának értéke pedig $14{,}5^m$ az ábra alapján.

A periódus ismeretében meghatározhatjuk az abszolút magnitúdót is az 1. ábra alapján. A leolvasás során ügyeljünk arra, hogy az x-tengely skálája nem lineáris, hanem logaritmikus! Az abszolút magnitúdó: $M \approx -4{,}4^m$.

$$m - M = -5 + 5 \log d \quad \rightarrow \quad d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \tag{44}$$

ahonnan $\boldsymbol{d \approx}$ **60 kpc**

Ez a Kis Magellán-felhő távolsága, amely tényleg a Lokális Csoport tagja, így összhangban van az eredményünk a feladat szövegével.

D4. feladat

A feladat szerint a Nap és a Vénusz is tökéletes fekete testnek vehető, amely termális egyensúlyban van, azaz a kisugárzott teljesítmény megegyezik a besugárzottal. A besugárzott teljesítményt ki tudjuk számolni a Vénusz távolságához tartozó napállandó (a helyi sugárzási fluxus) és a bolygó felszínének szorzataként. A napállandót a Vénusz távolságából nézve:

$$f = \frac{L_\odot}{4\pi d^2} = \frac{R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}{d^2} = 2154.789 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

A Vénuszt a beérkező sugárzás számolásakor egy r_V sugarú korongnak tekinthetjük. A Vénusz sugarát onnan kaphatjuk meg, hogy amikor a Földtől 0.28 AU-ra van, akkor 66 ívmásodperc alatt látszódik. Tehát a sugár:

$$r_\mathrm{V} = \tan 33" \cdot d_{F-V} = 6719.518\ \mathrm{km}.$$

Vénusz felszínére érkező teljesítményt a fentiek alapján a beérkező fluxus szorozva a felszínnel, míg a kisugárzott teljesítmény a Vénusz "luminozitása". Ez a két érték meg kell, hogy egyezzen, mert a Vénuszt fekete testnek tételeztük fel:

$$P_{be} = f A_\mathrm{V} = f \cdot r_\mathrm{V}^2 \pi \qquad \equiv \qquad P_{ki} = 4\pi r^2_{\mathrm{V}\sigma T_\mathrm{V}^4}.$$

Innen azt kapjuk a Vénusz hőmérsékletére, hogy

$$T_V^4 = \frac{f}{4\sigma} = 312.205\ \mathrm{K}.$$

A fenti érték azért különbözik az egyik bevezető feladatban kapottól, mert itt nem vettük figyelembe a bolygó albedóját. Következő lépésként felhasználjuk a Raylight-Jeans formulát, mely a Planck-törvény nagy hullámhosszakra érvényes közelítése:

$$B_\nu = \frac{2 k_B T_\mathrm{V} \nu^2}{c^2}$$

ahol B_ν a sugárzás adott frekvencián vett fluxusa.

Ez a kifejezés viszont a Vénusz felszínének egy pontjáról érkező sugárzást adja csak meg, így a fel kell szoroznunk ezt a mennyiséget a Vénusz látszó felszínével (gömbfelület). Az így kapott fluxust mi a Földön szeretnénk mérni, azaz a mérési pontig egy a Vénusz-Föld távolságnak megfelelő gömbfelületen fog eloszlani a fluxus, tehát

$$S = B_\nu \frac{r_V^2}{d_{F-V}^2} = \frac{2 k_B T \nu^2}{c^2} \tan 33''.$$

Így a végeredmény:

$$S \approx 3.827 \cdot 10^{-22} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{Hz}}$$