Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2020-21
4. Kozmológia
Megoldások

Dálya Gergely, Benkóczy Levente, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

2020. november 21.

1. Bemelegítő feladatok

B1. feladat

A vöröseltolódás definíciója:

$$\frac{a_0}{a_e} = 1 + z \tag{1}$$

Vagyis a mi esetünkben $a_0 = 1{,}37 \cdot a_e$, vagyis az Univerzum 1,37-szer akkora most, mint a fény kibocsátásának pillanatában volt. Ez azt jelenti, hogy az Univerzum **37%**-kal lett nagyobb.

B2. feladat

Anyagdominált univerzumban $a(t) \sim t^{2/3}$. Így az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{13{,}7\ \text{Gyr} - \Delta t}{13{,}7\ \text{Gyr}}\right)^{2/3} \tag{2}$$

Kihasználva, hogy $a_0 = 1$ és Δt helyére 5 illetve 10 milliárd évet beírva kapjuk, hogy:

$$\boldsymbol{a(t_0 - 5\ \textbf{Gyr}) = 0{,}74}$$

$$\boldsymbol{a(t_0 - 10\ \textbf{Gyr}) = 0{,}42}$$

B3. feladat

A feladatból adódó feltétel a sűrűségparaméterre:

$$\Omega_\Lambda = \Omega_\mathrm{m}$$

Definíció szerint:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\varrho_\Lambda}{\varrho_{\text{krit}}} = \frac{8\pi G \varrho_\Lambda}{3H^2} \tag{3}$$

$$\Omega_{\Lambda_0} = \frac{8\pi G \varrho_\Lambda}{3H_0^2}, \tag{4}$$

mivel $\varrho_{\Lambda,0} = \varrho_\Lambda$.

Felírva a sűrűségparamétereket a mai értékükkel:

$$\Omega_{\Lambda,0}\frac{H_0^2}{H^2} = \Omega_{\text{m},0}\frac{H_0^2}{H^2}(1+z^*)^3 \tag{5}$$

Innen z^*-ra adódik, hogy:

$$z^* = \left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\text{m},0}}\right)^{1/3} - 1 \tag{6}$$

Azaz:

$$\boldsymbol{z^* = 0{,}326}$$

B4. feladat

Az észlelt és laboratóriumi hullámhosszakból kiszámíthatjuk a z vöröseltolódást az alábbi képlettel:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \tag{7}$$

ahol $\Delta\lambda$ az észlelt és laboratóriumi hullámhosszak különbsége, λ_0 pedig a laboratóriumi hullámhossz, jelen esetben 2799,1 Å.

A hullámhosszkülönbség a megadott adatok alapján $\Delta\lambda = 14{,}16$ Å. Így a vöröseltolódásra $z = 0,00506$ adódik.

Innen a $z = v/c$ képlettel kiszámolhatjuk az M58 radiális sebességét, amire az alábbi értéket kapjuk:

$$\mathbf{1517{,}6\,\frac{km}{s}} \tag{8}$$

Innen a galaxis távolságát a Hubble-törvény alapján becsülhetjük meg, miszerint: $v = H \cdot d$, ahol v a galaxis látóirányú sebessége, $H = 67{,}8\,\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ a Hubble állandó, d a galaxis távolsága.

Innen a galaxis távolságára **22,4 Mpc** adódik. Ezen távolság alapján a Virgo-halmaz jöhet szóba mint az M58 halmaza, mivel annak távolsága nagyjából 17 Mpc. És tényleg igaz, az M58 a Virgo-halmaz egyik legfényesebb galaxisa.

2. Nehezebb feladatok

N1. feladat

Vegyük a Hubble-állandót $H = 70\,\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$-nek! A Hubble-törvényt használva a galaxis távolsága:

$$d = \frac{v}{H} = 9{,}29\ \text{Mpc} = 9{,}29 \cdot 10^6\ \text{pc} \tag{9}$$

Ha a galaxis ilyen messze van, akkor nyilván a benne lévő cefeida is. Tudjuk továbbá a cefeida látszó fényességét, vagyis kiszámíthatjuk az abszolút fényességét:

$$M = m + 5 - 5\lg d = -2{,}44^m \tag{10}$$

Innen pedig a periódus-fényesség reláció ismeretében megkaphatjuk a periódust napokban:

$$M = -2{,}43(\lg P - 1) - 4{,}05 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P = 10^{\frac{M+4,05}{-2,43}+1} = 2{,}17\ \mathbf{nap}} \tag{12}$$

N2. feladat

1. rész:

Azt keressük, hogy mikor egyenlő a sugárzás és az anyag energiasűrűsége, azaz:

$$\rho_{\mathrm{r}} = \rho_{\mathrm{m}}, \tag{13}$$

Beírva a z-függéseket:

$$\rho_{\mathrm{r},0}(1+z_{\mathrm{e}})^4 = \rho_{\mathrm{m},0}(1+z_{\mathrm{e}})^3, \tag{14}$$

Innen z_{e}-re kapjuk, hogy:

$$(1+z_{\mathrm{e}}) = \frac{\rho_{\mathrm{m},0}}{\rho_{\mathrm{r},0}} = \frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{\Omega_{\mathrm{r},0}} = 3000, \tag{15}$$

Azaz:

$$\boldsymbol{z_{\mathrm{e}} \approx 3000}$$

2. rész:

Tudjuk, hogy a hőmérséklet fordítottan arányos a skálafaktorral, így:

$$T \sim 1/a = 1 + z \tag{16}$$

Innen T_{e}-re az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{T_{\mathrm{e}}}{2{,}732\ \mathrm{K}} = 1 + z_{\mathrm{e}} \approx 3000 \tag{17}$$

Így:

$$\boldsymbol{T_{\mathrm{e}} = 8200\ \mathbf{K}} \tag{18}$$

3. rész:

A Wien-törvény segítségével határozzuk meg a legnagyobb intenzitáshoz tartozó hullámhosszat!

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mK}}{T_{\mathrm{e}}} = 354\ \mathrm{nm} \tag{19}$$

Az ilyen hullámhosszú foton energiája:

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \ 3 \cdot 10^8}{354 \cdot 10^{-9}}\ \mathrm{J} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{E_\nu = \frac{5{,}62 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \mathbf{eV} = 3{,}5\ \mathbf{eV}} \tag{21}$$

N3. feladat

Számítsuk ki először a Wien-törvényből, hogy milyen hullámhosszon legintenzívebb most a mikrohullámú háttérsugárzás!

$$\lambda_0 T_0 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mK} \quad \rightarrow \quad \lambda_0 = 1{,}062 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \tag{22}$$

A kibocsátott és az észlelt hullámhossz közötti összefüggés a következő:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\mathrm{em}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} = \frac{\lambda_0 - \lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{\mathrm{em}}} - 1 \tag{23}$$

ahol λ_{em} a kibocsátott sugárzás hullámhossza, λ_{obs} pedig a megfigyelt hullámhossz. Tehát $z = 8$-nál:

$$\lambda_{\mathrm{em}} = \frac{\lambda_0}{z+1} = 1{,}18 \cdot 10^{-4}. \tag{24}$$

A kibocsátott hullámhosszat beírva a Wien-törvénybe, megkaphatjuk annak a fekete testnek a hőmérsékletét, ami ilyen hullámhosszon sugároz legintenzívebben, ez pedig $\boldsymbol{T = 24{,}58}$ **K**.

N4. feladat

A vöröseltolódások különbségével a sávszélességre vonatkozó paramétert adtuk meg, ugyanis ha z_1 a felénk forgó oldal, z_2 a tőlünk elforgó oldal vöröseltolódása, akkor

$$z_1 = \frac{\lambda_{\mathrm{mozgás}} - \Delta\lambda - \lambda}{\lambda} \qquad \text{és} \qquad z_2 = \frac{\lambda_{\mathrm{mozgás}} + \Delta\lambda - \lambda}{\lambda} \tag{25}$$

ahol $\Delta\lambda$ a forgás miatti hullámhosszeltolódás, λ a laboratóriumi hullámhosszérték. Ezeknek képezve a különbségét, és mivel csak az eltérésre vagyunk kíváncsiak, az abszolútértékét véve:

$$z_2 - z_1 = \frac{2\,\Delta\lambda}{\lambda} = W. \tag{26}$$

Az előbbiek alapján az adott értéket berhatjuk a Tully-Fisher formulába, ami így:

$$M = -9{,}5 \lg \frac{1{,}18 \cdot 10^{-6} \cdot c}{2 \sin 45°} + 2 = -20{,}78^m \tag{27}$$

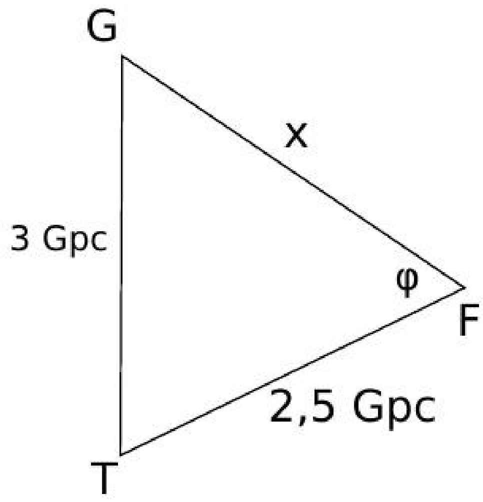
Ha az így kapott értéket beírjuk a távolságmodulus képletébe az adott látszó fényességgel, akkor azt kapjuk a távolságra, hogy:

$$\boldsymbol{d = 14{,}3\ \mathrm{Mpc}}$$

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D1. feladat

A feladat szövege alapján ismerjük a G-Tejútrendszer és az F-Tejútrendszer távolságokat, továbbá a G-F-Tejútrendszer szöget, ahogy azt az 1. ábrán is láthatjuk:



1. ábra

A hiányzó x távolságot koszinusztétellel számíthatjuk ki. Az ábra jelöléseit követve:

$$3^2 = x^2 + 2{,}5^2 - 2 \cdot x \cdot 2{,}5 \cdot \cos_\varphi \tag{28}$$

amelyet a következő másodfokú egyenletre rendezhetünk:

$$x^2 - 2{,}083\,x - 2{,}75 = 0 \tag{29}$$

Ennek a pozitív gyöke 3, tehát a G galaxistól 3 Gpc távolságra van az F galaxis. A Hubble-törvényből meghatározhatjuk az F galaxisnak a G-től való távolodási sebességét:

$$Hx = v = 210\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 0{,}7\ \mathrm{c} \tag{30}$$

Ilyen nagy sebességnél a hullámhosszváltozás kiszámításához már a Doppler-effektus relativisztikus képletét kell használni:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - 1 = 1{,}38 \tag{31}$$

Így a $\lambda = 656{,}28$ nm-es Hα vonal hullámhosszváltozása $\Delta\lambda = 905{,}98$ nm, vagyis a G galaxisból szemlélve az F galaxis spektrumát, a vonal $\boldsymbol{\lambda_{\mathrm{obs}} = 1562{,}26}$ **nm**-nél fog látszani.

D2. feladat

A feladat megoldásához elengedhetetlen a Hubble-paraméter felírása a skálafaktorokkal:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{32}$$

Tudjuk továbbá, hogy egy sík, anyagdominált Univerzumban a skálaparaméter időfüggése az alábbi:

$$a \sim t^{2/3} \tag{33}$$

Innen a deriválás szabályaiból következik, hogy $\dot{a} \sim t^{-1/3}$. Így:

$$H \sim \frac{1}{t} \tag{34}$$

Természetesen nincs szükségünk deriválásra, ha megjegyezzük H időfüggését. A fordított arányosság miatt felírhatjuk, hogy:

$$\frac{H_{\text{akkor}}}{H_{\text{most}}} = \frac{t_{\text{akkor}}}{t_{\text{most}}}, \tag{35}$$

ahol *akkor*-ral jelöltük a H akkori értékét, amikor a Voyager eléri a Tejútrendszer másik oldalát.

Innen átrendezve kapjuk az akkori H-t:

$$H_{\text{akkor}} = H_{\text{most}} \frac{13{,}7 \cdot 10^9 \text{ év}}{(13{,}7 \cdot 10^9 + \Delta t) \text{ év}} \tag{36}$$

Így beírva, hogy $H_{\text{most}} = 67{,}8 \, \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, és, hogy $\Delta t = 23 \text{ kpc}/17 \text{ km/s} = 1{,}33 \cdot 10^9$ év, a kérdéses H-ra azt kapjuk, hogy:

$$\boldsymbol{H_{\text{akkor}} = 61{,}9 \, \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}. \tag{37}$$

D3. feladat

Közelítsük az Univerzumot egy homogén sűrűségű gömbként! Ekkor egy, a szélén lévő részecskének a sebessége éppen a szökési sebesség. Másrészt viszont tudjuk, hogy igaz a Hubble-törvény is a tágulásra, így a két sebességet feleltessük meg egymásnak:

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} = HR \tag{38}$$

Innen kifejezhetjük a tömeget:

$$M = \frac{H^2 R^3}{2G} \tag{39}$$

A térfogatot $V = 4/3 \cdot R^3 \pi$ alakban felírva írjuk be a sűrűség képletébe:

$$\boldsymbol{\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3H^2}{8\pi G}} \tag{40}$$