

Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia

Szakkör 2020-21

5. Szférikus csillagászat

Megoldások

Dálya Gergely, Benkóczy Levente, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

2020. december 19.

1. Bemelegítő feladatok

B1. feladat

Meg van adva két oldal és a közrezárt szög, így kézenfekvő a gömbháromszögtani koszinusztétel használata:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (1)$$

ennek megoldásai pedig $a_1 = 100,68^\circ$, illetve $a_2 = 259,32^\circ$ ($360^\circ - a_1$, gondoljunk a koszinusz-függvény alakjára. Szinuszosz esetben 180° -ból kell levonni az első megoldást). Ha a_2 -t választanánk, akkor $a > b + c$ lenne, vagyis nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség, így a_1 a jó megoldás.

A gömbháromszögtani szinusztételből:

$$\sin \beta = \sin b \frac{\sin \alpha}{\sin a} = 0,733 \quad \rightarrow \quad \beta_1 = 47,10^\circ \quad \beta_2 = 132,90^\circ \quad (2)$$

$$\sin \gamma = \sin c \frac{\sin \alpha}{\sin a} = 0,551 \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = 33,45^\circ \quad \gamma_2 = 146,55^\circ. \quad (3)$$

Mivel $a > b$ és $a > c$, így $\alpha > \beta$ valamint $\alpha > \gamma$ kell legyen, így β_2 és γ_2 nem lehet jó megoldás. Koszinusztétellel ellenőrizhetünk is.

Összefoglalva az eredményeket:

$$a = 100,68^\circ \quad \beta = 47,10^\circ \quad \gamma = 33,45^\circ. \quad (4)$$

B2. feladat

Amikor a csillag felső kulminációban van, akkor delel, így azimutja $A = 0^\circ$. Magassága meg volt adva: $h = 46^\circ$. Térjünk át az első ekvatoriális koordináta-rendszerbe!

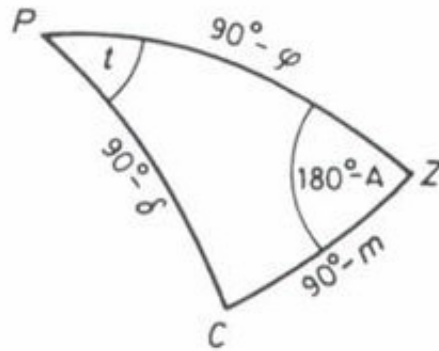
$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A = 0,062 \quad \rightarrow \quad \delta = 3,558^\circ. \quad (5)$$

Az óraszöge pedig, mivel éppen delel, $t = 0^\circ$. Három óra múlva pedig: $t = 3^h = 45^\circ$. Vagyis a távcsövünket a $\delta = 3,558^\circ$ $t = 3^h = 45^\circ$ koordinátákra kell állítani.

B3. feladat

1. rész:

Az első rész megoldásához rajzoljuk fel a csillagászati gömbháromszöget (lásd 1. ábra)! Az ezt jellemző 5 adatból most 3 ismert: a földrajzi szélesség Budapestre $\varphi = 47,5^\circ$, a magasság legyen 0, mert a csillag kelése és nyugvása érdekel minket, az óraszög pedig $t = 90^\circ$. Utóbbit onnan tudhatjuk, hogy az óraszög együtt változik az idővel (a kettő között $\frac{2\pi}{24 \text{ óra}}$ szorzóval válthatunk át), és mivel 12 órát volt fent a csillag, ezért 6 óra telt el a delelés (azaz az óraszög nullpontja) óta, aminek éppen 90° felel meg.



1. ábra. Csillagászati gömbháromszög

Ebben a gömbháromszögben egy koszinusztételt felírva a pólussal szemközti oldalra megkapjuk, hogy a deklináció nulla. Ezt egyébként előre is tudhattuk volna, mivel ez 12 órás horizont felett töltött időnél mindig igaz, kivéve ha az Egyenlítőn vagyunk.

Ezután a zenittel szemközti oldalra írjunk fel egy koszinusztételt! Ebből az azimutra (A) kapunk egy összefüggést:

$$0 = \sin(90^\circ) \sin(42,5^\circ) \cos(180^\circ - A) \quad (6)$$

Azaz $\cos(180^\circ - A) = 0$, amiből azt kapjuk, hogy:

$$A = 90^\circ, \quad (7)$$

azaz éppen nyugaton nyugszik le ez a csillag.

2. rész:

A feladat második részéhez meg kell gondolnunk, hogy a csillagok maximálisan mennyi időt tölthetnek a horizont felett. Azonban, mivel vannak olyan csillagok, amelyek mindig a horizont felett vannak (cirkumpoláris csillagok, például a sarkcsillag), ezért nem a horizont felett tartózkodásuk, hanem az éjszakák hossza fogja korlátozni ezek megfigyelésének maximális hosszát. Ha nem lenne a Nap, akkor gyakorlatilag bármeddig megfigyelhetnénk ezeket. Számoljuk tehát ki, hogy milyen hosszú a leghosszabb éjszaka Budapestről!

Egyszerűség kedvéért számoljuk a leghosszabb nappal hosszát, ami nyilvánvalóan ugyanolyan hosszú lesz, mint a leghosszabb éjszaka. Ehhez rajzoljuk fel a csillagászati gömbháromszöget, amiben most ismerjük φ -t, m -et mint a feladat első részében, és ismert a Nap deklinációja, ami a leghosszabb napra $\delta = 23,5^\circ$. Innen a pólussal szemközti oldalra felírva egy koszinusztételt azt kapjuk, hogy $t = 118,3^\circ$, amit a korábban látott módon időbe átszámítva 7,89 órát kapunk. A leghosszabb nappal és így a leghosszabb éjszaka hossza ennek duplája, azaz **15 óra 47 perc**.

B4. feladat

Egy csillag cirkumpolaritásának feltétele adott φ földrajzi szélességen az alábbi:

$$\delta > 90^\circ - \varphi, \quad (8)$$

ahol δ a csillag deklinációja. Ez az összefüggés a pólust és a zenitet tartalmazó főkört felrajzolva geometriai úton látható be. Hasonlóan, azok a csillagok nem kelnek fel soha sem, amelyekre:

$$\delta < \varphi - 90^\circ \quad (9)$$

Ezekbe beírva Bhubaneswar földrajzi szélességét ($\varphi = 20,27^\circ$) kapjuk a feltételt a cirkumpolaritásra:

$$\delta > 69,73^\circ \quad (10)$$

Ezek a csillagok pedig soha nem kelnek fel:

$$\delta < -69,73^\circ \quad (11)$$

2. Nehezebb feladatok

N1. feladat

A földrajzi koordináta-rendszerben a távolságot a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\cos x = \sin \varphi_a \sin \varphi_b - \cos \varphi_a \cos \varphi_b \cos(\lambda_b - \lambda_a), \quad (12)$$

ahol a index jelöli az egyik város, b index a másik város koordinátáit. Behelyettesítve Santiago és Wellington adatait: $\cos x = 0,103$, ahonnan $x = 84,078^\circ$. A Föld felszínén 1° távolságkülönbség 111,32 km-nek felel meg, tehát a két város távolsága: **$x = 9359,6$ km**.

N2. feladat

Mindegyik szóba jöhető város vagy a térképen 0-val jelzett időzónában van, vagy tőle eggyel keletebbre, amelyet nevezzünk +1-es időzónának!

Ha feltételezzük azt, hogy az Elefántcsontparttal azonos időzónában lévő valamelyik városba kerültünk, akkor egy olyat kell keressünk, amelyik 7 óra autózásra van Yamoussoukrotól. Feltételezve, hogy a dzsip folyamatosan 183 km/h-val száguldott, ez 1281 km-es távolságnak felel meg. Ebben az időzónában lévő egy-két város távolságát az N1. feladat megoldásában mutatott módon kiszámolva, majd esetleg a térképen megnézve a többi város távolságának ezekhez viszonyított arányait, meggyőződhetünk, hogy ebben az időzónában nincs ilyen nagyváros.

Tehát a keresett város a +1-es időzónában van. Itt viszont a 17:00-t mutató óra azt jelenti, hogy Elefántcsontparton még csak 16:00 van, így csak 6 órát jöttünk, ami 1098 km-nek felel meg. A három, ebben az időzónában lévő nagyváros közül ez majdnem megegyezik **Niamey** távolságával. A távolság percekbe átszámítva kb. 1 perc, vagyis legfeljebb ennyit késett a repülők.

N3. feladat

A kérdés teljesen ugyanolyan, mint a Föld esetén, csak a Nap maximális és minimális egyenlítőtől való eltérése lesz más. Éppen ezért, a horizontális és ekvatoriális koordinátákat ugyanúgy használhatjuk, mint a Föld esetén.

A kérdés megválaszolásához először gondoljuk meg, hogy maximálisan mekkora lehet a Nap deklinációja (δ) a Plutón. Ez hasonlóan a Földhöz a bolygó tengelyferdeségével lesz egyenlő, azaz jelen esetben $\delta_{max} = 60,4^\circ$. Így a minimális deklináció $\delta_{min} = -60,4^\circ$.

A csillagászati gömbháromszögben a pólussal szemközti szögre felírva egy koszinusztételt kapjuk, hogy a maximális és minimális félnapalok ideje:

$$t_{max} = \arccos \left(-\frac{\tan(\varphi)}{\tan(90^\circ - 60,4^\circ)} \right) \quad (13)$$

$$t_{min} = \arccos \left(-\frac{\tan(\varphi)}{\tan(90^\circ + 60,4^\circ)} \right) \quad (14)$$

, ahol φ a földrajzi szélesség.

Nézzük meg ezt különböző φ -kre!

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = 1$$

$$\varphi = 20^\circ \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = 2,59$$

$$\varphi = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = \infty$$

N4. feladat

Rajzoljuk fel a csillagászati gömbháromszöget! Ismert jelen esetben a Nap magassága, ami 0 , a deklináció, ami $23,5^\circ$, mert nyári napforduló van, és a földrajzi szélesség, ami az Alföldre nagyjából 47° . Innen megkaphatjuk a Nap azimutját (A), amelynek alapján megtalálhatjuk az északi irányt.

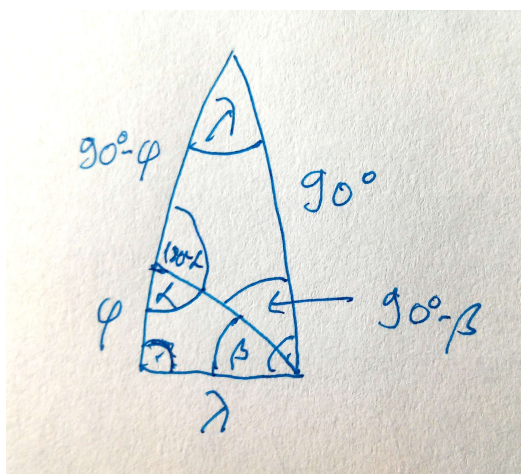
A zenittel szemközti oldalra felírva egy gömbháromszögtani koszinusztételt, kapjuk, hogy:

$$\cos A = \frac{\cos 66,5^\circ}{\sin 43^\circ}. \quad (15)$$

Innen az azimut $A = 125.78^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a Nap éppen 110 fokkal van jobbra a déli irányhoz képest. Ez azt jelenti, hogy mivel észak felé szeretnénk menni, ezért **a Nap irányához képest 54.22 fokkal jobbra kell indulnunk.**

N5. feladat

A Föld felszínén két pont közötti legrövidebb út egy főkört jelöl ki. A feladat tehát a Limán és Yogyakartán átmenő főkör legdélebbi pontjának megkeresése. Egy főkört két adat jellemez: az egyenlítővel bezárt szöge (β), és felszálló csomó földrajzi hosszúsága (λ_0). Ezekkel a paraméterekkel leírható, hogy egy adott földrajzi hosszúságnál (λ) milyen földrajzi szélesség (ϕ) tartozik a főkörhöz. Ehhez rajzoljunk fel egy olyan gömbháromszöget, melynek egyik csúcsa (A) az északi pólus, másik (B) a leírandó főkör felszálló csomója, harmadik (C) pedig a főkör egy tetszőleges pontja.



Egészítsük ki a háromszöget az ábrán látható módon. Ekkor a két megjelent háromszögben felírhatunk egy-egy szinusz tételt:

$$\frac{\sin \phi}{\sin \lambda} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (16)$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \phi)} \quad (17)$$

Ezekből kapjuk, hogy egy tetszőleges főkör egyenlete:

$$\tan \phi = \tan \beta \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (18)$$

Ahol feltettük, hogy a kapott egyenletben λ -t eltolhatjuk tetszőleges λ_0 -al.

Ezt felírva a két ismert pontra $((\phi_1, \lambda_1), (\phi_2, \lambda_2))$ megkaphatjuk a főkört leíró két paramétert:

$$\tan \lambda_0 = \frac{\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \sin \lambda_2 - \sin \lambda_1}{\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \cos \lambda_2 - \cos \lambda_1} \quad (19)$$

$$\tan \beta = \frac{\tan \phi_1}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)} \quad (20)$$

Ebből az alábbi eredményeket kapjuk:

$$\lambda_0 = -72,48^\circ \quad (21)$$

$$\beta = 69,64^\circ \quad (22)$$

Ebből következik, hogy a repülési pálya legdélebbi pontja **$-69,64^\circ$** .

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D1. feladat

A feladat lényege, hogy átváltunk egyenlítői koordináta-rendszerből ekliptikaiba. Ehhez felrajzolhatunk egy a csillagászati gömbháromszöghez hasonló gömbháromszöget (lásd 2. ábra). Itt π az ekliptika pólusa, $\varepsilon = 23,5^\circ$ az egyenlítő és az ekliptika hajlásszöge, β az ekliptikai szélesség.

A feladat szövege szerint $\delta = 53^\circ 36'$ és $\alpha = 13^h 49,8^m$, azaz $\delta = 53,6^\circ$ és $\alpha = 207,45^\circ$. Így az egyenlítői pólussal szemközti oldalra felírva egy koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$\beta = 57,9^\circ. \quad (23)$$

Ez a szög azt mondja meg, hogy az ekliptikához képest milyen szögben van az üstökös. Így az üstökös h ekliptika síkja feletti magassága egy szögfüggvénnyel az alábbi módon kapható:

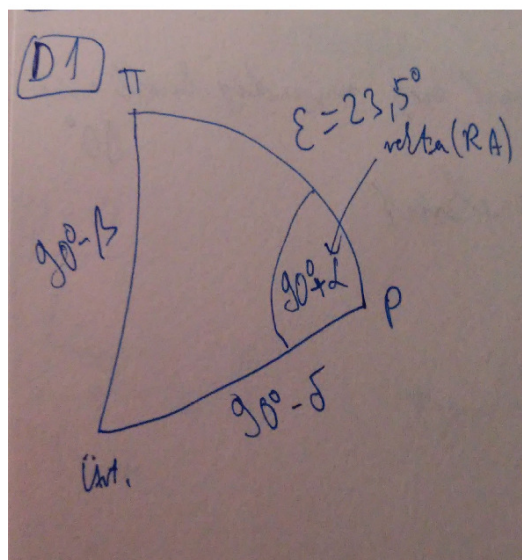
$$h = r \sin \beta \quad (24)$$

, ahol $r = 0,725$ CsE, az üstökös Földtől mért távolsága. Innen:

$$h = 0,644 \text{ CSE}. \quad (25)$$

D2. feladat

A meridiánon való áthaladáskor delelnék az égitestek, a csillagidő pedig az éppen delelő csillag rektaszcenziója, tehát Krakkóban helyi idő szerint 6:00-kor a csillagidő $S = 13^h 2^m 10^s$. Krakkó ugyanabban az időzónában van, mint Budapest, vagyis a zónaidő szerinti 6:00 az 5:00 UT-t jelent.



Scanned by CamScanner

2. ábra. Ekliptikai és ekvatoriális koordinátarendszerek közti átváltásra használható gömbháromszög

Mennyi ekkor a csillagidő Greenwich-ben? 1° szélességkülönbség időben 4 percnél felel meg, vagyis $\lambda^{(h)} = \lambda/15 = 1^h 19^m 45,2^s$. A greenwich-i csillagidő tehát 5:00 UT-kor:

$$S_{\text{Gr}}^{(5)} = S - \lambda^{(h)} = 11^h 42^m 24,8^s \quad (26)$$

0:00 UT óta középideőben 5 óra telt el. Csillagidőben ez több lesz, mivel a csillagnap rövidebb, mint a középnap. Egy évben 366,25 csillagnap, illetve 365,25 középnap van, vagyis ebből arányossággal:

$$\Delta S = 5 \cdot \frac{366,25}{365,25} = 5^h 0^m 49^s \quad (27)$$

Tehát a Greenwich-i csillagidő 0:00 UT-kor:

$$S_{\text{Gr}}^{(0)} = S_{\text{Gr}}^{(5)} - \Delta S = 6^h 11^m 35,8^s \quad (28)$$

D3. feladat

A horizont és a Tejút síkjának szöge megegyezik a zenit és galaktikus pólusok távolságával, így elég azt kiszámolnunk.

A 2. egyenlítői koordináta-rendszerben két pont távolságát a gömbháromszögtani Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$\cos d = \cos \Delta\delta \cos \Delta\alpha \quad (29)$$

, ahol d a keresett távolság, $\Delta\delta$ a pontok deklinációkülönbsége, $\Delta\alpha$ pedig a rektaszcenziókülönbségük.

A galaktikus pólus 2. ekvatoriális koordinátái meg voltak adva, így csak a zenitre kell ezeket kiszámolni. Azt egyszerűen lehet látni, hogy a zenit deklinációja a földrajzi szélességgel egyezik meg. Azt is tudjuk, hogy a zenit óraszöge nulla, így felhasználva a csillagidő képletét ($\Theta = \alpha + t$) kapjuk, hogy a zenit rektaszcenziója a csillagidővel egyezik meg. A greenwichi csillagidőből a helyit úgy kapjuk ha hozzáadunk $\Delta t = \Delta\lambda \frac{24 \text{ h}}{360^\circ}$ órát, ami most 1,267 óra. Így $\alpha_{zenit} = 7,067 \text{ h} = 106^\circ$.

Így:

$$\cos d = \cos(47,5^\circ - 27,22^\circ) \cos(192,85^\circ - 106^\circ)$$

Innen kapjuk, hogy $d = 87^\circ$ szöget zár be a Tejút síkja a horizont síkjával.