

Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2020-2021
6. Szférikus csillagászat II.
Megoldások

Dálya Gergely, Benkóczy Levente, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

1. Bemelegítő feladatok

B1. feladat

Meg van adva két oldal és a közrezárt szög, így kézenfekvő a gömbháromszögtani koszinusztétel használata:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = -0,076 \quad (1)$$

ennek megoldásai pedig $a_1 = 94,36^\circ$, illetve $a_2 = 265,64^\circ$ ($360^\circ - a_1$, gondoljunk a koszinusz-függvény alakjára. Szinus esetén 180° -ból kell levonni az első megoldást). Ha a_2 -t választanánk, akkor $a > b + c$ lenne, vagyis nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség, így a_1 a jó megoldás.

A gömbháromszögtani szinusztételből:

$$\sin \beta = \sin b \frac{\sin \alpha}{\sin a} = 0,954 \quad \rightarrow \quad \beta_1 = 72,56^\circ \quad \beta_2 = 107,44^\circ \quad (2)$$

$$\sin \gamma = \sin c \frac{\sin \alpha}{\sin a} = 0,331 \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = 19,35^\circ \quad \gamma_2 = 160,65^\circ. \quad (3)$$

A γ_2 nem lehet jó megoldás, mert egy gömbháromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szögnek kell állnia. Vagyis a γ_1 a jó megoldás, ami viszont azt jelenti, hogy ha β_1 -et választanánk, akkor nem teljesülne, hogy a gömbháromszög belső szögeinek összege 180° és 540° közé esik. Tehát β_2 a helyes.

Tehát azt kaptuk, hogy:

$$a = 94,36^\circ \quad \beta = 107,44^\circ \quad \gamma = 19,35^\circ. \quad (4)$$

Innen a háromszög T területét szteradiánban kaphatjuk meg az alábbi képlettel:

$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (5)$$

Innen:

$$T = 0,38 \quad (6)$$

Ezt átszámolhatjuk négyzetfokba is egy $180^2/\pi^2$ szorzóval. Így a gömbháromszög területe **1248,48 négyzetfok**.

B2. feladat

Az 1. ábrán felrajzoltuk a Nap útját a nyári napforduló idején oldalnézetből. Az ábrán az a speciális helyzet szerepel, amikor a Nap alsó kulminációjában éppen eléri a csillagászati szürkületet, azaz a -18 fokos magasságot.

Tekintsük az ábrán megvastagított háromszöget. Ez egy derékszögű háromszög, amelynek egyik hegyes szöge $23,5^\circ$, másik pedig $\varphi + 18^\circ$.

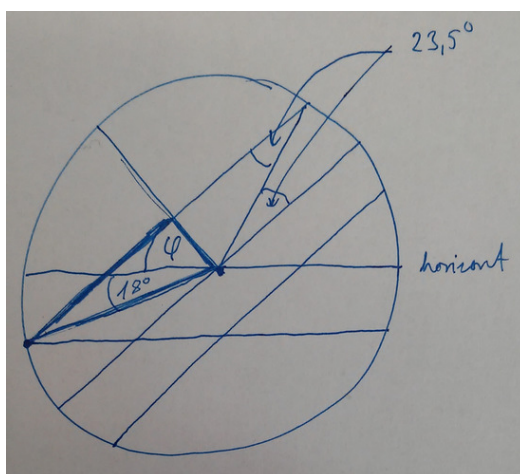
Innen megkapható a földrajzi szélesség:

$$\varphi = 90^\circ - 18^\circ - 23,5^\circ = 48,5^\circ \quad (7)$$

Látható, hogy akkor nem lesz teljes sötétség a nyári napfordulókör, ha a földrajzi szélesség ennél nagyobb. Természetesen a déli féltekén is megvalósul hasonló helyzet $-\varphi$ -nél kisebb szélességeken.

Tehát a teljes sötétség el nem érésének feltétele:

$$\varphi > 48,5^\circ \text{ vagy } \varphi < -48,5^\circ \quad (8)$$



1. ábra. Szürkület

B3. feladat

Mivel Szöul koordinátái északi szélességben és keleti hosszúságban vannak megadva, Asunción koordinátái pedig déli szélességben és nyugati hosszúságban, át kell váltanunk valamelyiket a másikba. Ekkor egyszerűen negatív előjelet kapnak a koordináták, így pl. ha Asunción koordinátáit

váltjuk át, a következőt kapjuk:

$$\varphi = -25^{\circ}16' \quad \lambda = -57^{\circ}38' \quad (9)$$

Így pedig már használhatjuk a következő képletet:

$$\cos x = \sin \varphi_a \sin \varphi_b + \cos \varphi_a \cos \varphi_b \cos(\lambda_b - \lambda_a) \quad (10)$$

ahonnan $x = 197,13^{\circ}$, amit a Föld esetében 111,32 km/o -kal kell megszorozni, hogy kilométerben megkapjuk a távolságot: **$x = 18604,7$ km**

B4. feladat

Az északi féltekén a cirkumpolaritás feltétele az, hogy $\delta > 90^{\circ} - \varphi$, a déli féltekén pedig, hogy $\delta < -90^{\circ} + \varphi$, így az új-zélandi nagyváros esetén a **$\delta < -53,17^{\circ}$** deklinációjú csillagok lesznek cirkumpolárisak.

Az északi féltekén azok a csillagok fognak a zenitben delelni, amelyekre $\delta = \varphi$, a déli féltekén pedig azok, amelyekre $\delta = -\varphi$, vagyis Auckland-ben azok, amelyekre **$\delta = -36,83^{\circ}$**

2. Nehezebb feladatok

N1. feladat

Szokásos módon a csillagászati gömbháromszög felrajzolásával kezdünk (lásd 2. ábra). Írjunk fel egy coszinusz tételt a pólussal szemközti oldalra:

$$\cos(90^{\circ} - m) = \cos(90^{\circ} - \varphi) \cos(90^{\circ} - \delta) + \sin(90^{\circ} - \varphi) \sin(90^{\circ} - \delta) \cos t \quad (11)$$

Ezt átalakítva megkapjuk, hogy:

$$\cos t = \frac{\sin m - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (12)$$

A szürkület hossza az az idő ami a Nap 0° és -6° -os magassága közt eltelt idő, azaz:

$$\Delta t = t(m = -6^{\circ}) - t(m = 0^{\circ}) \quad (13)$$

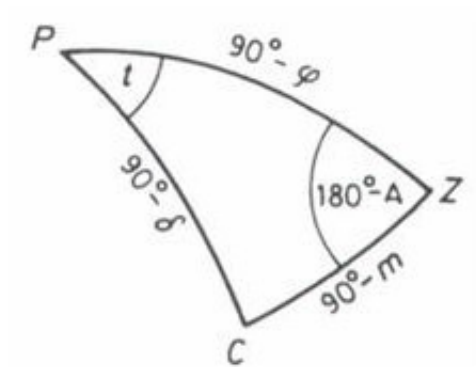
Azaz:

$$\Delta t = \arccos \left(\frac{\sin(-6^{\circ}) - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \right) - \arccos(\tan \varphi \tan \delta) \quad (14)$$

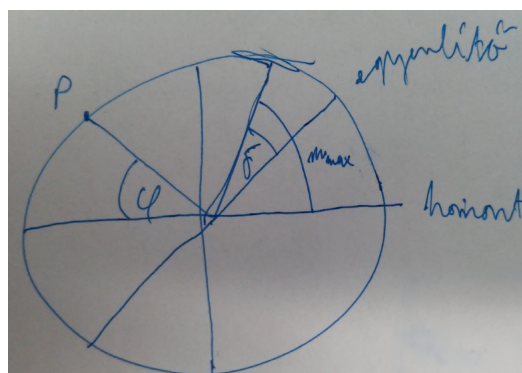
Beírva az adatokat kapjuk,hogy:

$$\Delta t = 74,95^{\circ} - 61,47^{\circ} = 13,48^{\circ} \quad (15)$$

Átszámolva időre, kapjuk, hogy a szürkület hossza **54 perc**.



2. ábra. Csillagászati gömbháromszög



3. ábra. Éggömb észak-dél irányú metszete

N2. feladat

Tekintsük a 3. ábrát. Ez az éggömb egy észak-dél irányú metszete. Leolvasható róla, hogy egy csillag delelési magassága $m_{\max} = (180^\circ - 90^\circ - \varphi) + \delta$.

Rajzoljuk fel ezután a csillagászati gömbháromszöget (lásd 2. ábra). Ebben $m = 0$ esetben a zenittel szemközti oldalra felírva egy koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$\sin \delta = -\cos \phi \cos A \quad (16)$$

Ezt az összefüggést a korábban kapott képletbe beírva kapjuk az összefüggést a delelési magasság és a lenyugvás idejében vett azimut (A) között:

$$m_{\max} = 90^\circ - \varphi + \arcsin(-\cos \varphi \cos A) \quad (17)$$

A feladat második részéhez gondoljuk meg, hogy a magasság maximálisan 90° lehet. Így a maximális delelési magasság 90° , tehát a maximális delelési magassághoz tartozó azimutot úgy kapjuk, ha ezt beírjuk a delelési magasságos képletbe. Ebből azt kapjuk, hogy:

$$\arcsin(-\cos \varphi \cos A) = \varphi \quad (18)$$

Ezt átrendezve kapjuk az eredményt:

$$\cos A = -\tan \varphi \quad (19)$$

N3. feladat

A célállomásra érkezés időpontjában tudjuk a $\varphi, m = 0$ és δ (nem változik) koordinátákat. Innen meghatározhatjuk az azimutot (az egyszerűsítéseket már elvégezve):

$$\cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \rightarrow A = 120^\circ \quad (20)$$

A másik megoldás 240° lenne, de ez van nyugatra, vagyis a lenyugvás itt történik meg. Az óraszöget úgy kaphatjuk meg egyértelműen, ha $\sin t$ -t és $\cos t$ -t is kiszámítjuk, és keressük a kettő közös megoldását:

$$\sin t = \frac{\sin A}{\cos \delta} \quad \cos t = -\frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (21)$$

A közös megoldás $t = 87,1734^\circ$. Így az óraszögek különbsége: $79^\circ 37' 24''$, ami a marsi $360^\circ = 23^h 39^m 35^s$ összefüggést használva $5^h 13^m 59^s$ időkülönbségnek felel meg.

A két pont távolságát a már jól ismert képlettel számíthatjuk ki, annyi különbséggel, hogy most nem 111,32-vel kell beszorozni a fokokban kapott végeredményt. A szorzófaktort a Mars $R = 3397$ km-es sugarával így számíthatjuk ki:

$$\frac{2R\pi}{360} = 59,29 \frac{km}{^\circ} \quad (22)$$

A távolság így $29,59$ km, aminek a megtételéhez $v = 5,65 \frac{km}{s}$ -os sebességre van szükség.

N4. feladat

Mivel a Mars forgási periódusideje $23^h39^m35^s$, így amíg a Földön 15 nap telik el, a Marson $15 \cdot 24^h / 23^h39^m35^s = 15,2157$ sol (marsi nap). A Mars keringési ideje 686,97 nap, ami 696,85 sol. Csillagnapokból, pontosabban „csillagsol”-okból pedig eggyel több van egy évben, mint ahogy azt a Föld esetében is láttuk, így ahhoz, hogy a sol-okat „csillagsol”-ba átszámítsuk, azt $696,85 / 697,85 = 0,9986$ -tal kell szorozni. Így a 15,2157 sol marsi csillagidőben 15,1939. Vagyis a csillag 15-ször „körbement”, ezenkívül pedig az óraszögének megváltozása: $360^\circ \cdot 0,1939 = 69,804^\circ$.

N5. feladat

A kérdés teljesen ugyanolyan, mint a Föld esetén, csak a Nap maximális és minimális egyenlítőtől való eltérése lesz más. Éppen ezért, a horizontális és ekvatoriális koordinátákat ugyanúgy használhatjuk, mint a Föld esetén.

A kérdés megválaszolásához először gondoljuk meg, hogy maximálisan mekkora lehet a Nap deklinációja (δ) a Plutón. Ez hasonlóan a Földhöz a bolygó tengelyferdeségével lesz egyenlő, azaz jelen esetben $\delta_{max} = 60,4^\circ$. Így a minimális deklináció $\delta_{min} = -60,4^\circ$.

A csillagászati gömbháromszögben a pólussal szemközti szögre felírva egy koszinusztételt kapjuk, hogy a maximális és minimális félnappalok ideje:

$$t_{max} = \arcsin \left(-\frac{\tan(\varphi)}{\tan(90^\circ - 60,4^\circ)} \right) \quad (23)$$

$$t_{min} = \arcsin \left(-\frac{\tan(\varphi)}{\tan(90^\circ + 60,4^\circ)} \right) \quad (24)$$

, ahol φ a földrajzi szélesség.

Nézzük meg ezt különböző φ -kre!

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = 1$$

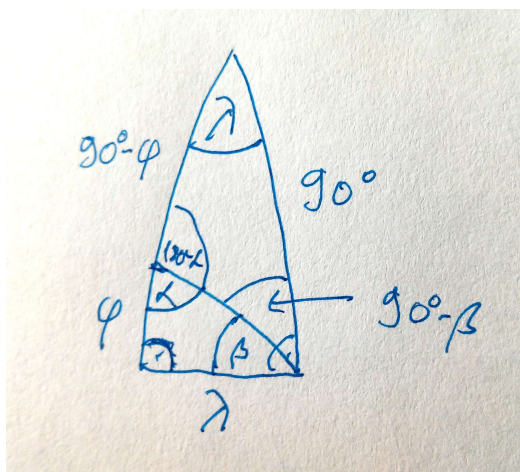
$$\varphi = 20^\circ \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = 2,59$$

$$\varphi = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad t_{max}/t_{min} = \infty$$

N6. feladat

A Föld felszínén két pont közötti legrövidebb út egy főkört jelöl ki. A feladat tehát a Limán és Yogyakartán átmenő főkör legdélebbi pontjának megkeresése. Egy főkört két adat jellemez: az egyenlítővel bezárt szöge (β), és felszálló csomó földrajzi hosszúsága (λ_0). Ezekkel a paraméterekkel leírható, hogy egy adott földrajzi hosszúságnál (λ) milyen földrajzi szélesség (ϕ) tartozik a főkörhöz. Ehhez rajzoljunk fel egy olyan gömbháromszöget, melynek egyik csúcsa (A) az északi pólus, másik (B) a leírandó főkör felszálló csomója, harmadik (C) pedig a főkör egy tetszőleges pontja.

Egészítsük ki a háromszöget az ábrán látható módon. Ekkor a két megjelölt háromszögben felírhatunk egy-egy szinusz tételt:



$$\frac{\sin \phi}{\sin \lambda} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (25)$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \phi)} \quad (26)$$

Ezekből kapjuk, hogy egy tetszőleges főkör egyenlete:

$$\tan \phi = \tan \beta \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (27)$$

Ahol feltettük, hogy a kapott egyenletben λ -t eltolhatjuk tetszőleges λ_0 -al.

Ezt felírva a két ismert pontra $((\phi_1, \lambda_1), (\phi_2, \lambda_2))$ megkaphatjuk a főkört leíró két paramétert:

$$\tan \lambda_0 = \frac{\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \sin \lambda_2 - \sin \lambda_1}{\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} \cos \lambda_2 - \cos \lambda_1} \quad (28)$$

$$\tan \beta = \frac{\tan \phi_1}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)} \quad (29)$$

Ebből az alábbi eredményeket kapjuk:

$$\lambda_0 = -72,48^\circ \quad (30)$$

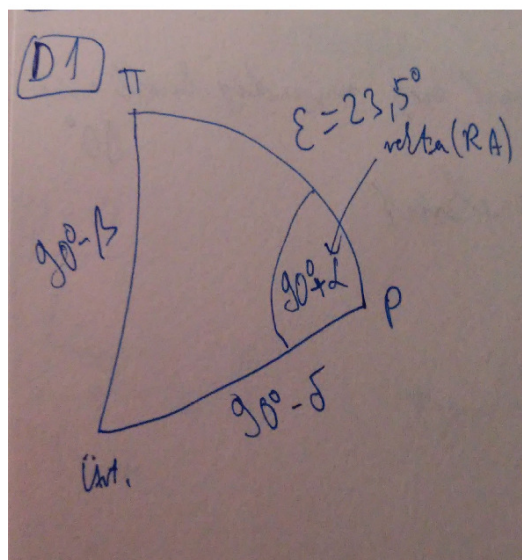
$$\beta = 69,64^\circ \quad (31)$$

Ebből következik, hogy a repülési pálya legdélebbi pontja **-69,64°**.

3. Diákolimpiai szintű feladatok

D1. feladat

A feladat lényege, hogy átváltunk egyenlítői koordináta-rendszerből ekliptikaiba. Ehhez felrajzolhatunk egy a csillagászati gömbháromszöghez hasonló gömbháromszöget (lásd 2. ábra). Itt π az ekliptika pólusa, $\varepsilon = 23,5^\circ$ az egyenlítő és az ekliptika hajlásszöge, β az ekliptikai szélesség.



Scanned by CamScanner

4. ábra. Ekliptikai és ekvatoriális koordinátarendszerek közti átváltásra használható gömbháromszög

A feladat szövege szerint $\delta = 53^\circ 36'$ és $\alpha = 13^h 49,8^m$, azaz $\delta = 53,6^\circ$ és $\alpha = 207,45^\circ$. Így az egyenlítői pólussal szemközti oldalra felírva egy koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$\beta = 57,9^\circ. \quad (32)$$

Ez a szög azt mondja meg, hogy az ekliptikához képest milyen szögben van az üstökös. Így az üstökös h ekliptika síkja feletti magassága egy szögfüggvénnyel az alábbi módon kapható:

$$h = r \sin \beta \quad (33)$$

, ahol $r = 0,725$ CsE, az üstökös Földtől mért távolsága. Innen:

$$h = 0,644 \text{ CSE}. \quad (34)$$

D2. feladat

A meridiánon való áthaladáskor delelnék az égitestek, a csillagidő pedig az éppen delelő csillag rektaszcenziója, tehát Krakkóban helyi idő szerint 6:00-kor a csillagidő $S = 13^h 2^m 10^s$. Krakkó ugyanabban az időzónában van, mint Budapest, vagyis a zónaidő szerinti 6:00 az 5:00 UT-t jelent.

Mennyi ekkor a csillagidő Greenwich-ben? 1° szélességkülönbség időben 4 percnél felel meg, vagyis $\lambda^{(h)} = \lambda/15 = 1^h 19^m 45,2^s$. A greenwich-i csillagidő tehát 5:00 UT-kor:

$$S_{\text{Gr}}^{(5)} = S - \lambda^{(\text{h})} = 11^{\text{h}}42^{\text{m}}24,8^{\text{s}} \quad (35)$$

0:00 UT óta középídőben 5 óra telt el. Csillagidőben ez több lesz, mivel a csillagnap rövidebb, mint a középnap. Egy évben 366,25 csillagnap, illetve 365,25 középnap van, vagyis ebből arányossággal:

$$\Delta S = 5 \cdot \frac{366,25}{365,25} = 5^{\text{h}}0^{\text{m}}49^{\text{s}} \quad (36)$$

Tehát a Greenwich-i csillagidő 0:00 UT-kor:

$$S_{\text{Gr}}^{(0)} = S_{\text{Gr}}^{(5)} - \Delta S = 6^{\text{h}}11^{\text{m}}35,8^{\text{s}} \quad (37)$$

D3. feladat

A horizont és a Tejút síkjának szöge megegyezik a zenit és galaktikus pólusok távolságával, így elég azt kiszámolnunk.

A 2. egyenlítői koordináta-rendszerben két pont távolságát a gömbháromszögtani Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$\cos d = \cos \Delta\delta \cos \Delta\alpha \quad (38)$$

, ahol d a keresett távolság, $\Delta\delta$ a pontok deklinációkülönbsége, $\Delta\alpha$ pedig a rektaszcenziókülönbségük.

A galaktikus pólus 2. ekvatoriális koordinátái meg voltak adva, így csak a zenitre kell ezeket kiszámolni. Azt egyszerűen lehet látni, hogy a zenit deklinációja a földrajzi szélességgel egyezik meg. Azt is tudjuk, hogy a zenit óraszöge nulla, így felhasználva a csillagidő képletét ($\Theta = \alpha + t$) kapjuk, hogy a zenit rektaszcenziója a csillagidővel egyezik meg. A greenwichi csillagidőből a helyit úgy kapjuk ha hozzáadunk $\Delta t = \Delta\lambda \frac{24 \text{ h}}{360^\circ}$ órát, ami most 1,267 óra. Így $\alpha_{\text{zenit}} = 7,067 \text{ h} = 106^\circ$.

Így:

$$\cos d = \cos(47,5^\circ - 27,22^\circ) \cos(192,85^\circ - 106^\circ)$$

Innen kapjuk, hogy $d = 87^\circ$ szöget zár be a Tejút síkja a horizont síkjával.