Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia
Szakkör 2020-2021
7. Szituációs tréning
Megoldások

Dálya Gergely, Benkóczy Levente, Császár Kornél, Knoch Júlia, Világos Blanka
(Bécsy Bence, Csörnyei Géza, Kalup Csilla)

2021. február 13.

1. feladat

Ahhoz, hogy az antianyag gömb soha ne érje el a Napot arra van szükség, hogy a Hubble-tágulásból adódó sebessége éppen a helyi szökési sebességgel egyezzen meg, vagyis:

$$v = HR = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \tag{1}$$

ahonnan

$$H = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}} = 1{,}77 \cdot 10^{-17}\ \frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{2}$$

Hogy ezt összehasonlíthassuk a Hubble-állandónak a mi univerzumunkban lévő értékével, át kell váltanunk km/(s·Mpc)-re. Ehhez egyszerűen a km és a Mpc közötti váltószámmal, $3{,}086 \cdot 10^{19}$-nel kell megszoroznunk a kapott értéket. Tehát:

$$\boldsymbol{H = 547{,}8\ \frac{\mathbf{km}}{\mathbf{s \cdot Mpc}}} \tag{3}$$

A földönkívüliek galaxisát a vöröseltolódás miatt másmilyen színűnek fogjuk látni. Ha a galaxis csak Nap-típusú csillagokból áll, akkor vehetjük úgy, hogy $\lambda = 500$ nm-en van a sugárzási maximuma, és így a Naphoz hasonlóan fehérnek látnánk. A Hubble–Lemaître-törvénnyel kiszámíthatjuk a galaxis távolodási sebességét:

$$v = H \cdot d = 54\,775\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, \tag{4}$$

ahonnan a vöröseltolódás:

$$z = \frac{v}{c} = 0{,}183 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \tag{5}$$

A galaxis színképe tehát $\boldsymbol{\Delta\lambda = 91}$ **nm**-rel tolódott el a vörös irányába. Ennek megfelelően nem fehérnek, hanem kissé sárgásnak fogjuk látni a galaxist.

2. feladat

A)

A Nap luminozitása felírható a Stefan–Boltzmann-törvény segítségével.

$$L_\odot = A_\odot \sigma_{SB} T_\odot^4 = 4\pi R_\odot^2 \sigma_{SB} T_\odot^4 \tag{6}$$

r távolságba érve Nap összes sugárzása egy $4r^2\pi$ felületű gömbön oszlik el egyenletesen.

$$j(r) = \frac{L_\odot}{4r^2\pi} = \frac{R_\odot^2}{r^2}\sigma_{SB} T_\odot^4 \tag{7}$$

A bolygó felületére beeső sugárzás a gömb vetületével lesz arányos, tehát R_B sugár esetén $2R_B^2\pi$. Továbbá tudjuk, hogy a fény α-szorosa visszaverődik. Ebből már kifejezhető a teljes beérkező teljesítmény.

$$W_{be} = (1-\alpha)2R_B^2\pi j(r) = (1-\alpha)2R_B^2\pi\frac{R_\odot^2}{r^2}\sigma_{SB} T_\odot^4 \tag{8}$$

A bolygó a lakhatósági zóna közepén található, így a távolsága a Naptól:

$$r = 1.17 \text{ CSE} = 1.75 \cdot 10^{11} \text{ m} \tag{9}$$

Tudjuk, hogy a bolygó gyorsan forog a tengelye körül, így feltehetjük, hogy a sugárzás egyenletesen éri a bolygó minden oldalát és a felszín mindenhol azonos hőmérsékletű. A bolygót feketetestként közelítve felírható a beérkező és a kibocsájtott teljesítmény egyensúlya.

$$W_{be} = W_{ki} \tag{10}$$

$$(1-\alpha)2R_B^2\pi\frac{R_\odot^2}{r^2}\sigma_{SB} T_\odot^4 = 4\pi R_B^2 \sigma_{SB} T_B^4 \tag{11}$$

$$T_B^4 = (1-\alpha)\frac{R_\odot^2}{2r^2}T_\odot^4 = 7.768 \cdot 10^9 \text{ K} \tag{12}$$

$$T_B \approx 297 \text{ K} \approx 24°\text{C} \tag{13}$$

Tehát a bolygó átlaghőmérséklete körülbelül 24°C. Ez összhangban állna a víz olvadás- ill. forráspontjával légköri nyomáson, viszont a számítás során elhanyagoltuk a légkört.

A fenti 12. egyenletből az is leolvasható, hogy ha elhanyagoljuk a légkört és a bolygófelszínről visszaverődő fényt, akkor a hőmérséklet csak a központi csillag sugarától, hőmérsékletétől ill. az attól való távolságtól függ. Tehát ha a lakhatósági zóna kijelölése során a bizonyos hőmérséklettartományhoz tartozó r-eket keressük, akkor r jó közelítéssel csak a csillag sugarától és hőmérsékletétől fog függni. (Másképp: csak a luminozitásától.)

B)

Az új csillag hőmérséklete kiszámolható a Wien-féle eltolódási törvény alapján:

$$T_u = \frac{b}{\lambda_{max}} = 4830 \text{ K} \tag{14}$$

Az előző részfeladat alapján kifejezhető az idegen csillag lakhatósági zónája a Nap lakhatósági zónájából. A Nap zónájában lévő bolygóknak ugyanolyan hőmérsékletűnek kell lennie, mint az új csillag körül keringőnek. A bolygófelszíni hatásokat elhanyagolva az alábbi kifejezésre jutunk a 12. egyenletből ha a Nap esetén felírható bolygóhőmérsékletet és az új csillag esetén felírható bolygóhőmérsékletet egyenlővé tesszük.

$$\frac{r_u}{r_\odot} = \frac{R_u T_u^2}{R_\odot T_\odot^2} \tag{15}$$

Behelyettesítve a megadott adatokat a lakhatósági zóna külső és belső pereme:

$$r_k = 0{,}542 \text{ CSE}$$
$$r_b = 0{,}765 \text{ CSE}$$

A bolygópályák csillagtól való legközelebbi (periasztron) és legtávolabbi (apoasztron) pontja az ellipszis megadott paramétereiből kiszámolható.

$$d_{pa} = a(1-e)$$
$$d_{aa} = a(1+e)$$

A megfigyelt bolygók periasztron és apoasztron pontjait az alábbi táblázat tartalmazza. Ebből

Bolygó	d_{pa} [CSE]	d_{aa} [CSE]
a	0,249	0,351
b	0,523	0,578
c	0,792	0,808
d	1,170	1,430

leolvasható, hogy egyedül a b jelű bolygó tud a lakhatósági zónában tartózkodni, de nem a teljes pálya szakaszán.

C)

Először is kifejezhetjük a csillag tömegét. Fősorozatbeli csillagok tömege és luminozitása közt az alábbi kifejezés áll fenn.

$$\left(\frac{M_u}{M_\odot}\right)^{3{,}5} = \frac{L_u}{L_\odot} \tag{16}$$

$$M_u = M_\odot \left(\frac{R_u T_u^2}{R_\odot T_\odot^2}\right)^{4/7} \tag{17}$$

A csillag gravitációsan vonzza az m tömegű r távolságban lévő fóliát:

$$F_g = \gamma \frac{m M_u}{r^2} \tag{18}$$

A beérkező fotonok impulzusa az ütközés során p-ről $-p$-re változik, tehát összesen $\Delta p = 2p$ impulzust adnak át a fóliának. A fotonok impulzusa az energiájukból

$$p = \frac{E}{c} \tag{19}$$

módon írható fel. Newton második törvényét kicsit átalakítva szemléletesebb lesz, hogy ebből hogyan lehet kifejezni az erőt. A fólia fénynyomásból származó Δt idő alatt végbemenő sebességváltozása felírható az összes ezalatt beérkező foton által átadott impulzus összegeként.

$$m\Delta v = \sum_{\Delta t} \Delta p \tag{20}$$

$$F_f = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\sum_{\Delta t} \Delta p}{\Delta t} = \frac{2}{c}\frac{\sum_{\Delta t} E}{\Delta t} \tag{21}$$

Ez utóbbi hányados az összes beérkező foton energiája időegységenként, ami megegyezik a vitorlára beérkező összes sugárzás teljesítményével. De ezt a teljesítményt már a korábbi feladatokból a Nap esetére felírtuk! (7. és 8. egyenlet).

$$F_f = \frac{2}{c}W_{be} = \frac{2}{c}Aj(r) = \frac{2}{c}A\frac{R_u^2}{r^2}\sigma_{SB}T_u^4 \tag{22}$$

Vizsgáljuk meg a ható erőt:

$$F = F_f - F_g = \frac{1}{r^2}\left(\frac{2}{c}AR_u^2\sigma_{SB}T_u^4 - \gamma m M_u\right) \tag{23}$$

Láthatjuk, hogy az erő előjele nem függ a csillagtól való távolságtól, csak a rendszerre vonatkozó konstansoktól. Így ha azt akarjuk, hogy a magára hagyott fólia kijusson a csillagrendszerből az erőnek minden pontban nagyobbnak kell lennie nullánál. Ennek a feltétele:

$$\frac{2}{c}AR_u^2\sigma_{SB}T_u^4 > \gamma m M_u \tag{24}$$

A fólia m tömege kifejezhető a felületéből (A) a vastagságból (d) és a sűrűségéből (ρ).

$$m = \rho d A \tag{25}$$

Ezt a 24. egyenlőtlenségbe behelyettesítve majd azt átrendezve az alábbi feltételre jutunk a fólia vastagságára:

$$d < \frac{2R_u^2\sigma_{SB}T_u^4}{c\gamma M_u \rho} = 2{,}48 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 0{,}25\ \mu\mathrm{m} \tag{26}$$

(Ilyen vékony fóliát képesek létrehozni aranyból, alumíniumból ebben a vastagságban csak nagyon kis átmérőjű pelyhekről találtam említést.)

3. feladat

a) feladat

Lásd: link

b) feladat

Ha ez volt a nagyobb amplitúdójú fényességcsökkenés, akkor a kisebb (és hűvösebb) csillag a nagyobb (és forróbb) csillag elé ért, és abból takart ki számunkra egy jelentős felületet.

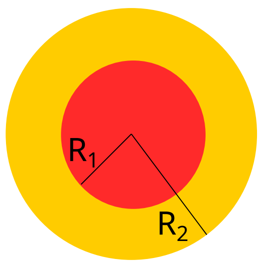
A magnitúdóváltozás logaritmikus, melyben az intenzitások aránya szerepel. Az egyes csillagokból származó intenzitás azok luminozitásával arányos, ami a Stefan–Boltzmann-törvény értelmében:

$$L = A\sigma T^4 = R^2 = R^2\pi\sigma T^4. \tag{27}$$

Az intenzitás a fedés nélküli esetben a két csillag luminozitásának összegéből származik.

Abban az esetben, amikor az 1-es csillag a 2-es elé kerül, az kitakar egy részt forróbb társából. Mivel ebben az esetben az 1-es csillag a 2-es egy forró felületét kitakarja és azt egy hűvösebbel „helyettesíti”, ez az elrendeződés nagyobb fényességesést eredményez, mint az, amikor az 1-es csillag a 2-es mögé ér. Az intenzitás ilyenkor egy $(R_2^2 - R_1^2)\pi$ felületű, T_2 hőmérsékletű, és egy $R_1^2\pi$ felületű, T_1 hőmérsékletű komponensből adódik össze.

A magnitúdóváltozásban ezen intenzitások aránya jelenik meg (így a σ és π szorzók kiesnek, csak a sugarak négyzetei és a hőmérsékletek negyedik hatványai maradnak meg):



1. ábra. A két csillag az észlelt fedéskor.
A kisebb sugarú és egyben hűvösebb csillag a másik elé tér be.

$$\Delta m = -2{,}5 \log \frac{I}{I_{\mathrm{tot}}} = -2{,}5 \log \frac{R_2^2T_2^4 - R_1^2T_2^4 + R_1^2T_1^4}{R_2^2T_2^4 + R_1^2T_1^4} \tag{28}$$

$$\frac{R_2^2T_2^4 - R_1^2T_2^4 + R_1^2T_1^4}{R_2^2T_2^4 + R_1^2T_1^4} = 10^{-\frac{\Delta m}{2,5}} := D \tag{29}$$

Átalakítva egyszerű, ki nem részletezett lépésekkel:

$$R_1^2 = \frac{(1-D)T_2^4}{(D-1)T_1^4 + T_2^4} R_2^2 := fR_2^2, \quad f = 0{,}0943 \tag{30}$$

A másik fedésnél a kisebb csillag a nagyobb mögé megy be, tehát csak a nagyobb csillag felülete sugároz:

$$\Delta m' = -2.5 \log \frac{R_2^2 T_2^4}{R_2^2 T_2^4 + R_1^2 T_1^4} = -2{,}5 \log \frac{T_2^4}{T_2^4 + f T_1^4} = \boxed{0{,}015^m = \Delta m'}. \tag{31}$$

c) feladat

Ha $R_2 = 1{,}37\ \mathrm{R}_\odot$, akkor $R_1 = \sqrt{f} R_2 = 0{,}42\ \mathrm{R}_\odot$. Van ebben bármi meglepő?

4. feladat

a) rész

Tudjuk, hogy a feladatrészt meg lehet oldani csak a keringésidővel és a látszó átmérővel. Tudjuk, hogy körpályán kering a test, ezért jónak tűnhet felírni először a körpályán keringés sebességére vonatkozó összefüggést:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{32}$$

Itt v a kerületi sebesség, G a gravitációs állandó, M a központi test tömege, r pedig a keringő test, jelen esetben az űrhajó tömege.
Az egyik ismert adatunk a keringésidő, aminek köze van a keringési sebességhez, nézzük tehát először ezt a kapcsolatot!
A keringési idő közvetlenül a szögsebességgel (ω) van kapcsolatban, méghozzá: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T a keringésidő. Ez már egyfajta sebesség, de még nem pont az, amit mi szeretnénk, vagyis a keringési sebesség. Viszont erre is ismert egy egyszerű összefüggés, szögsebesség és kerületi sebesség között: $v = r\omega$, itt r a pálya sugarát jelenti, ugyanúgy, mint az (1)-es összefüggésben. Ha ω helyére behelyettesítjük a keringési idővel vett kifejezését, a következőt kapjuk a kerületi sebességre: $v = r\frac{2\pi}{T}$.
Ezt írjuk most be (1)-be, így eltűnik a számunkra ismeretlen sebesség és helyére egy olyan kifejezés kerül, amiben már szerepel az egyik ismert adatunk:

$$r\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Ezt az egyenletet emeljük négyzetre, majd szorozzunk be r-rel, hogy kissé szebb egyenletet kapjunk!

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM \tag{33}$$

Így már 1-gyel kevesebb ismeretlen van az egyenletünkben, haladunk!
Mit is számolunk most?
A csillag átlagos sűrűségét.
De hiszen a sűrűség kapcsolatban van a tömeggel!
$M = \rho V$, ρ a csillag átlagos sűrűsége, V pedig a térfogata. Tudjuk ezen kívül, hogy a csillag

gömb alakúnak látszik, tehát a valóságban is elég közel kell lennie a gömb alakhoz, elvégre egy földön kívüli űrhajóján csak vannak jó pontos eszközök! Így a csillag térfogata viszonylag egyszerűen felírható a gömb térfogatképletével: $V = \frac{4}{3}R^3\pi$, R a gömb sugara. A bekezdés elején olvasható összefüggés alapján tehát ezt már csak meg kell szoroznunk a kérdéses sűrűséggel, hogy megkapjuk a tömeget, így az eredményt már helyettesíthetjük is be M helyére!

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = G\rho\frac{4}{3}R^3\pi \tag{34}$$

Ezzel látszólag nem sokkal lettünk előrébb...
Ne felejtsük azonban el, hogy tudunk még valamit: a látszó átmérőt! A csillag látszó sugara az pontosabban, amire most szükségünk lesz, ez ugyanis kapcsolatot teremt a csillag sugara és távolsága között: $\sin\alpha = \frac{R}{r}$, itt α a csillag látszó sugara.
Ebből fejezzük ki mondjuk r-t!

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}$$

Ha ezt behelyettesítjük a 3-ba, a következőt kapjuk:

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2 \sin^3\alpha} = G\rho\frac{4}{3}R^3\pi \tag{35}$$

Ebben a képletben mindkét oldalon szerepel R^3, tehát ezzel egyszerűsíthetünk, majd ez után már csak a keringésidő, a látszó sugár szinusza, valamint a keresett sűrűség lesz az összefüggésben, tehát átrendezhetünk ρ-ra:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2\sin^3\alpha} \tag{36}$$

Ezután már csak annyi a dolgunk, hogy behelyettesítünk a keringésidővel T-be és a látszó átmérő felével α-ba, ezzel a csillag átlagsűrűségére megkapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\rho = 572\ \frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m^3}}}.$$

(Megjegyzés: ha a (3)-as összefüggésnél feltesszük, hogy $r = R$, vagyis közel keringünk az égitest felszínéhez, pl. bolygóhoz, akkor a sugár/távolság köbe fog szerepelni mindkét oldalon, tehát a sin-es tag kivételével ugyanazt kapjuk, mint most. Tehát ebben az esetben egy egyszerűbb, de közelítő kifejezést fogunk kapni arra az esetre, amikor pl. egy bolygó felszínéhez viszonylag közel keringő műholdról van szó.)

b) rész

A tanácsolt összefüggés:

$$v = \sqrt{G(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Itt m az űrhajó tömege, r a csillagtól vett távolság (már nem konstans), a pedig az ellipszispálya félnagytengelye.
A feladat szövege szerint m elhanyagolható, tehát 0-nak vehetjük M-hez képest:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{37}$$

A periasztron és apoasztron pontokkal tudunk kezdeni bármit is, hiszen itt ismerünk egyáltalán bármit, úgyhogy a (6)-os egyenletet célszerű ott felírni, ahol egyszerűbbnek tűnik a helyzet. Mit is tudunk?
A csillag látszó átmérőjét mind a két helyről nézve és azt, hogy a periasztron pontban mennyivel gyorsított az űrhajó a körsebességhez képest. (Mivel a körpálya egy pontján gyorsított a hajó, ezért értelemszerűen a pálya túloldalán távolabb lesz a csillagtól, így az indulás pontja a csillaghoz legközelebbi pontja a pályának, azaz a periasztron.)
Mivel a periasztronbeli sebességet ezzel egyszerűbben fel tudjuk írni, ezért induljunk ki innét!
Kezdjünk ismét a sebességgel! Tudjuk, hogy a körsebességhez képest az az űrhajó 1 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$-ot gyorsult, tehát a sebességet felírhatjuk a periasztron távolsághoz tartozó körsebesség és a sebességnövekedés összegeként. Utóbbit g-vel jelölve és r helyett r_p periasztron távolságra áttérve a (6)-os egyenlet:

$$\sqrt{\frac{GM}{r_p}} + g = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} \tag{38}$$

Nézzük meg, mit tudunk mondani az a fél nagytengelyről!
Jelöljük az apoasztron-távolságot r_a-val!
Tudjuk, hogy ez és a közelebbi pont távolsága felírható az excentricitással (e) és a félnagytengellyel:

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

Az excentricitást pedig ki tudjuk fejezni a távolságokkal, ehhez vegyük az a)-részben használt α periasztronkor észlelt szöget és az apoasztronkor mért szöget, amit jelöljünk β-val! Az előbbi, ismert összefüggésekbe írjuk be a csillagsugár (R) és a távolságok közötti kapcsolatokat: $\sin\alpha = \frac{R}{r_p}$, valamint $\sin\beta = \frac{R}{r_a}$.
A fentebbi összefüggések hányadosa utóbbiakkal:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} \tag{39}$$

Ebből:

$$(1-e)\sin\alpha = (1+e)\sin\beta$$

Zárójelek felbontása után:

$$\sin\alpha - e\sin\alpha = \sin\beta + e\sin\beta$$

Ezt átrendezve e-re:

$$e = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

Mivel mind α, mind β ismertek, ezért e értékét egyszerű behelyettesítéssel számolhatjuk, eredményül ≈ 0.015-öt kapunk.
Ezzel kifejezhetjük már a-t:

$$a = \frac{r_p}{1-e}$$

Ezt ha bírjuk a 38. egyenletbe:

$$\sqrt{\frac{GM}{r_p}} + g = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1-e}{r_p}\right)} \tag{40}$$

Ezután helyezzük be a képletbe végül a kérdéses R csillagsugarat!
Az a)-pontból ismert módszerrel ($M = \frac{4}{3}\rho R^3\pi$) helyettesítsünk be a 40. összefüggésbe:

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{3}G\rho R^3\pi}{r_p}} + g = \sqrt{\frac{4}{3}G\rho R^3\pi\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1-e}{r_p}\right)} \tag{41}$$

Itt már csak egyetlen egy ismeretlen maradt: r_p. Azonban ez és az R között ismerjük a kapcsolatot: $r_p = \frac{R}{\sin\alpha}$.
Ezt írjuk tehát be a 41. egyenletbe:

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{3}G\rho R^3\pi\sin\alpha}{R}} + g = \sqrt{\frac{4}{3}G\rho R^3\pi\left(\frac{2\sin\alpha}{R} - \frac{\sin\alpha(1-e)}{R}\right)} \tag{42}$$

Ebben először is R-ek a második hatványon lesznek, mert jobb oldalt ki tudunk emelni $\frac{1}{R}$-t. Ezen kívül jobbról $\sin\alpha$-t is ki lehet emelni. Emeljünk ki továbbá R-et a gyökjel alól, valamint rendezzük a gyökös tagokat egy oldalra!

$$g = R\left(\sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi\sin\alpha(2-(1-e))} - \sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi\sin\alpha}\right)$$

Ebből ki tudjuk emelni az utolsó gyökös tagot:

$$g = R\sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi\sin\alpha}\cdot(\sqrt{1+e}-1)$$

És ebből már végre ki tudjuk fejezni R-t:

$$R = \frac{g}{(\sqrt{1+e}-1)\sqrt{\frac{4}{3}G\rho\pi\sin\alpha}}$$

Az ismert értékekkel történő behelyettesítés után:

$$\boldsymbol{R = 1{,}37\cdot 10^6\ \mathrm{km}}$$

c)-rész

Tudjuk, hogy a tömeget megkapatjuk a térfogat és a tömeg szorzataként, vagyis $M = \frac{4}{3}\rho R^3\pi$. A számolt értékekkel ez:

$$\boldsymbol{M = 6{,}16 \cdot 10^{30}\ \mathbf{kg}}$$

5. feladat

a) A feladat szövegéből tudjuk, hogy a leszállóegység indítási magassága a pálya legközelebbi pontja a bolygóhoz, így ez lesz a pericentrum távolság. Ismerjük az összefüggést a pericentrum távolság, a fél nagytengely és az excentricitás között, így ezt fogjuk használni.

$$r_{\text{peri}} = a(1-e) \tag{43}$$

$$a = \frac{r_{\text{peri}}}{1-e} = \frac{9{,}271 \cdot 10^6}{1-0{,}7} = 3{,}09 \cdot 10^7\ \text{m} \tag{44}$$

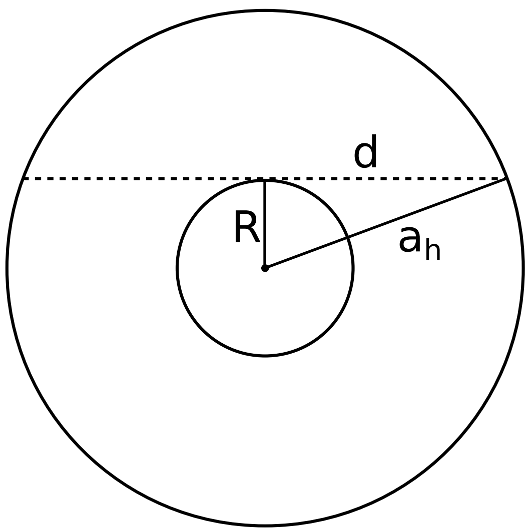
b) Tudjuk a hold szinodikus periódusát és a bolygó periódusát is, így ki tudjuk számolni a hold keringési idejét.

$$\frac{1}{T_{\text{szin}}} = \frac{1}{T_h} - \frac{1}{T_b} \tag{45}$$

$$T_h = \frac{T_{\text{szin}} \cdot T_b}{T_{\text{szin}} + T_b} = \frac{39{,}5 \cdot 50}{39{,}5 + 50} = 22{,}067\ \text{óra} \tag{46}$$

A keringési periódusból a Kepler-törvények segítségével megkaphatjuk a hold pályájának fél nagytengelyét:

$$a_h = \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^24 \cdot (22{,}067 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 4 \cdot 10^7\ \text{m} \tag{47}$$



A képből látható, hogy egy Pitagorasz-tétellel kiszámolhatjuk a bolygó sugarát:

$$R^2 + d^2 = a_h^2 \tag{48}$$

$$R = \sqrt{a_h^2 - d^2} = 7.96 \cdot 10^6 \text{ m} \tag{49}$$

A bolygó sugarából és tömegéből kiszámolhatjuk a felszíni nehézségi gyorsulást:

$$g = G \cdot \frac{M_b}{R^2} = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(7{,}96 \cdot 10^6)^2} = 6{,}32 \text{ m/s}^2 \tag{50}$$

Feltételezve, hogy a rover kihasználja a hajtóművei teljes teherbírását:

$$m' = \frac{\tau}{g} - m = \frac{8400}{6{,}32} - 1200 = 129{,}1 \text{ kg} \tag{51}$$